

科学研究費助成事業 研究成果報告書

令和 5 年 6 月 26 日現在

機関番号：14301

研究種目：若手研究

研究期間：2019～2022

課題番号：19K14502

研究課題名（和文）接続層の導来圏への基本群作用と安定性条件の空間の研究

研究課題名（英文）Research on fundamental group actions on derived categories of coherent sheaves and spaces of stability conditions

研究代表者

平野 雄貴 (Hirano, Yuki)

京都大学・理学研究科・助教

研究者番号：50804225

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 3,100,000円

研究成果の概要（和文）：本研究では主に二つの成果を得た。一つ目はBridgeland安定性条件に関するものである。代数多様体の接続層の導来圏上のBridgeland安定性条件のなす空間は、超弦理論と呼ばれる物理学の理論において重要な概念であると考えられており、盛んに研究されてきた。本研究では、3次元フロップ収縮に付随する三角圏上のBridgeland安定性条件の空間を記述した。本研究の二つ目の成果として、Halpern-LeistnerとSamによって構成された、擬対称表現に付随するGIT商の接続層の導来圏上の基本群作用を、伊山--Wemyss変異を用いて記述した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

3次元フロップ収縮に付随する三角圏上の安定性条件の空間は、これまで技術的仮定を置いた場合でしか記述されていなかったが、本研究では一般の場合に記述することができた。また、そのアプローチは、伊山--Wemyssによって近年発展した非可換代数の表現論を用いたものであり、その理論の有用性を示す意味でも意義のある研究であったといえる。また、擬対称表現に付随するGIT商の接続層の導来圏上の基本群作用の研究においても、伊山--Wemyssの理論が有用であることを確かめることができた。

研究成果の概要（英文）：There are two main results of this research. One is on Bridgeland stability conditions. Spaces of Bridgeland Stability conditions on derived categories of coherent sheaves on algebraic varieties are important in the string theory. We describe the space of Bridgeland Stability conditions on certain triangulated categories associated to arbitrary 3-fold flopping contractions. As the other result, we show that the fundamental group actions, which are constructed by Halpern-Leistner and Sam, on the derived category of GIT quotient of certain representations of linear reductive groups correspond to compositions of equivalences induced by iterated Iyama--Wemyss mutations.

研究分野：代数幾何学

キーワード：Bridgeland安定性条件 接続層の導来圏 基本群の作用

1. 研究開始当初の背景

特異点を持つ代数多様体の研究において、その特異点解消を研究することは重要である。近年、代数多様体の特異点解消の非可換代数版である非可換特異点解消と呼ばれる非可換代数が盛んに研究されている。特に、クレパント解消と呼ばれる良い特異点解消の非可換代数版である非可換クレパント解消は、しばしばクレパント解消と導来同値になることが知られている。このとき、非可換代数の表現論的アプローチによりクレパント解消の導来圏を研究することが可能となる。伊山—Wemyss や Donovan—Wemyss により、フロップ収縮を与える 3 次元のクレパント解消 X に対し、 X の導来圏を非可換クレパント解消を用いて研究する試みが多くなされている。例えば、3 次元多様体のフロップと呼ばれる双有理変換が、変異と呼ばれる加群の操作に対応することが示されている。研究開始以前の Wemyss との共同研究では、これらの研究を応用し、3 次元フロップ上の導来圏へのある種の基本群作用の忠実性を証明した。これらの研究により、非可換代数の表現論を用いた接続層の導来圏のさらなる研究が期待されていたといえる。

2. 研究の目的

本研究の目的は、クレパント解消の導来圏を、非可換クレパント解消の表現論的視点から研究することである。特に、

- (1) 3 次元フロップ収縮に付随する三角圏上の Bridgeland 安定性条件の空間
- (2) 代数トーラスの擬対称表現から定まる商特異点のクレパント解消の間の導来圏の同値

の 2 つについて、非可換クレパント解消の表現論を用いて研究することである。

(1) について

戸田による先行研究があるが、そこでは技術的な仮定が必要となっていた。本研究では、その仮定を外し、戸田の結果を一般化することを目指す。さらに、これまでの Wemyss との共同研究で得られた、三角圏へのある種の基本群の作用の忠実性の結果を応用し、安定性条件の空間の単連結性の証明を目指す。

(2) について

Halpern-Leistner—Sam は、擬対称表現と呼ばれる簡約代数群 G の表現 X に対し、 X の GIT 商の導来圏が、マジックウィンドウと呼ばれる商スタック $[X/G]$ の導来圏のある種の部分三角圏と同値となることを証明し、マジックウィンドウの間の導来同値の合成により、GIT 商の導来圏にある実超平面配置の複素化の基本群が作用することを証明した。またマジックウィンドウには標準的な傾斜対象 T が存在し、 X がジェネリックな場合その自己準同型環 $\text{End}(T)$ は X のアフィン商 X/G の非可換クレパント解消であることが知られている。このとき、マジックウィンドウは非可換クレパント解消の導来圏と同値となり、基本群作用を生成するマジックウィンドウの間の圏同値は、非可換クレパント解消の間の何らかの導来同値に対応する。 G が代数トーラスの場合に、この圏同値が伊山—Wemyss により導入された変異と呼ばれる加群の操作と対応することを示すことが(2)の第一の目的であり、これを用いて導来圏への基本群作用が忠実であることを示すことが第二の目的である。これらは、3 次元の場合の伊山—Wemyss の研究や私と Wemyss とのある種の基本群作用の忠実性の研究を高次元の商特異点の場合に拡張する試みである。

3. 研究の方法

(1) について

まず、Van den Bergh の結果により、3 次元フロップ収縮に付随する三角圏を、非可換クレパント解消やその一般化である modification 代数と呼ばれる非可換代数の導来圏の部分三角圏と同一視することができる。非可換代数の導来圏の部分圏として見ることで、部分三角圏上に非可換代数の導来圏に由来する標準的な安定性条件が定まる。この標準的な安定性条件に、加群の変異が誘導する非可換代数の導来同値を作用させることで、新たな安定性条件を生み出すこ

とができる。このようにして作られる安定性条件によって、全ての(正規化された)安定性条件が尽くされることを示す。さらに、安定性条件の空間がある超平面配置の複素化の補空間の正則被覆空間であることを示す。

(2) について

まず、擬対称表現の非可換クレパント解消の変異が、クレパント解消上のある種のベクトル束の変異から定まることを示す。このことと擬対称表現に付随する GIT 商上のベクトル束に関する Teleman の消滅定理を用いて、マジックウィンドウの間の圏同値が、非可換クレパント解消上のある種の傾斜加群が誘導する導来同値に対応することを示す。そして、その傾斜加群がある加群 M とその変異により得られる加群 M' の間の準同型射全体 $\text{Hom}(M, M')$ で与えられることを示す。さらに、この対応と Wemyss との共同研究で用いた手法を応用して、忠実性の証明を目指す。

4. 研究成果

(1) について

3次元フロップに付随する三角圏上の Bridgeland 安定性条件が、ある実超平面配置の複素化の補空間の正則被覆空間であることを証明した。さらに応用として、フロップ収縮上のある種の自己同値群の構造を決定した。また、クレパント解消に付随する弦理論的ケーラーモジュライ空間も、既約な曲線のフロップ収縮に対して完全に決定することができた。これらの結果は当初の目的を完全に達成するものである。

(2) について

当初目指していた基本群作用の忠実性は示せなかったが、原氏との共同研究により、基本群の作用を生成するマジックウィンドウの間の圏同値と非可換クレパント解消の変異が定める圏同値との対応は明らかにできた。さらに得られた変異が、3次元の場合に現れる変異とはいくつかの意味で異なることも確認できた。加群の変異は、加群のある直和因子を異なる加群に取り替える操作であるが、3次元の場合取り替える直和因子は直既約であった。また、変異する操作も1回行えばよかった。しかし、今回得られた変異は取り替える直和因子は直既約とは限らず、また変異する回数も複数回必要となる場合もあることがわかった。また、変異という操作には右変異と左変異の2つのバージョンがあり、3次元の場合これらは同じ操作を与えることが知られているが、本研究で扱った商特異点の場合はこれらのバージョンは一般には異なるものであることがわかった。さらに、これらの結果は代数トーラスとは限らない一般の簡約な代数群の場合にもある程度類似の結果が成り立つことを示すことができた。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計0件

〔学会発表〕 計3件（うち招待講演 3件 / うち国際学会 3件）

1. 発表者名 平野雄貴
2. 発表標題 Prime thick subcategories on elliptic curves
3. 学会等名 Categorical and Analytic Invariants in Algebraic Geometry VIII (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 平野雄貴
2. 発表標題 Stability conditions for 3-fold flops
3. 学会等名 Tilting Theory, Singularity Categories, & Noncommutative Resolutions (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 平野雄貴
2. 発表標題 Full strong exceptional collections for invertible polynomials of chain type
3. 学会等名 Mini workshop on derived categories and related topics (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2020年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8 . 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------