

科学研究費助成事業 研究成果報告書

令和 5 年 6 月 19 日現在

機関番号：14401

研究種目：若手研究

研究期間：2019～2022

課題番号：19K14556

研究課題名（和文）繰り込みを伴う非線形確率偏微分方程式の解析に対する一般理論

研究課題名（英文）General theories on nonlinear stochastic partial differential equations with renormalizations

研究代表者

星野 壮登 (Hoshino, Masato)

大阪大学・大学院基礎工学研究科・准教授

研究者番号：20823206

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 3,300,000円

研究成果の概要（和文）：繰り込みを必要とする確率偏微分方程式の研究を、一般論と具体例の両面から行った。一般論については、正則性構造理論という局所的な解析の理論と、パラ制御解析というFourier解析に基づく理論の2つのアプローチがあるが、それらがある意味で同値であることを証明した。具体例については、Hoegh-Krohnモデルに付随する確率量子化モデルや、摩擦項をもつ非線形確率波動方程式、さらに一般の非線形項をもつ準線形放物型方程式など、数理物理において重要な幾つかの確率偏微分方程式について、繰り込み可能性や解の時間局所的または大域的な可解性を示すことができた。

研究成果の学術的意義や社会的意義

近年、繰り込みという特別な操作が必要な確率偏微分方程式が注目を集めており、場の量子論などの観点から盛んに研究されている。本研究課題の第一の成果は、この分野における正則性構造理論とパラ制御解析という2つの異なるアプローチが本質的に同値であることを厳密に示したことであり、また第二の成果は、Hoegh-Krohnモデルなどの重要なモデルの繰り込み可能性を、場合によって一般論を拡張しながら証明したことであり、これらの成果により、繰り込みを伴う確率偏微分方程式の一般論としての研究がさらなる発展を遂げることが期待される。

研究成果の概要（英文）：We studied stochastic partial differential equations with renormalizations both theoretically and practically. Theoretically, we proved that the two approaches, the theory of regularity structures, which is based on a local analysis, and the theory of paracontrolled calculus, which is based on Fourier analysis, are equivalent in a sense. Practically, we proved renormalizability and local or global in time solvability of several stochastic partial differential equations important in mathematical physics, such as the stochastic quantization associated with the Hoegh-Krohn model, nonlinear damped stochastic wave equations, and quasilinear parabolic equations with general nonlinear terms.

研究分野：確率偏微分方程式

キーワード：確率偏微分方程式 繰り込み 正則性構造理論 パラ制御解析

1. 研究開始当初の背景

統計力学や量子力学などのミクロな現象を扱う分野においては、分子の熱運動などの不確定要素を数学的に扱うために、確率論は重要な道具の1つである。確率偏微分方程式 (SPDE) は、そのような不確定要素を含みながら時間発展する現象を記述するための微分方程式である。特に近年注目を集めているのが、繰り込みという特別な操作が必要な SPDE (特異確率偏微分方程式, SSPDE) である。SSPDE の一般論的な取り扱いは、Hairer の正則性構造理論 (2014) や Gubinelli, Imkeller, Perkowski のパラ制御解析 (2015) という新たな理論の登場によって初めて可能となり、ここ 10 年ほどで飛躍的に研究が進んでいる。

2. 研究の目的

正則性構造理論やパラ制御解析は強力な理論であるが、現在の手法では扱えていない問題も多く、発展の余地が多く残されていると感じていた。そのため、より適用範囲の広い一般論を構築することを目的とし、次の2つの研究を行うことにした。

(I) 正則性構造理論とパラ制御解析は同じ目的に基づく似た理論であるが、使われている数学的手法が異なる。それにより、例えば正則性構造理論では多くの SSPDE を一般論的に扱えるものの、 ϕ^4_3 モデルなどの具体的な SSPDE の研究においてはパラ制御解析の方が扱いやすいなどの違いがあった。そこで、正則性構造理論とパラ制御解析で使われている異なる手法の同値性を明らかにすることで、2つの長所を生かした新たな理論の展開を目指した。

(II) 正則性構造理論とパラ制御解析の適用範囲は、一般的に多項式非線形項をもつ半線形放物型方程式に限られており、例えば Hoegh-Krohn モデルなどの指数型ポテンシャルをもつ SSPDE や、準線形放物型 SSPDE には適用できなかった。この研究では、2つの理論の適用範囲にない具体的な SSPDE を考察することで、一般論の適用範囲をさらに広げることを目指した。

3. 研究の方法

研究(I)については、Ismaël Bailleul 氏 (レンヌ第一大学) と共同で研究を行なった。研究(II)については、Hoegh-Krohn モデルの研究(II-1)を河備浩司氏 (慶應義塾大学)、楠岡誠一郎氏 (京都大学) と、摩擦項をもつ確率 Klein-Gordon 方程式の研究(II-2)を福泉麗佳氏 (東北大学、現・早稲田大学)、成亥隆恭氏 (大阪大学) と、多粒子系のモデルと関係した準線形方程式の研究(II-3)を舟木直久氏 (早稲田大学、現・北京応用数学研究院)、謝賓氏 (信州大学)、Sunder Sethuraman 氏 (アリゾナ大学) と、準線形一般化 KPZ 方程式の研究(II-4)を Bailleul 氏、楠岡氏とそれぞれ共同で行なった。

研究を効率的に進めるために、パソコンやタブレット端末を使用したり、研究課題に関連する文献を収集したりする目的で物品費を使用した。これらの物品は、研究を進めるために必要な前提知識を学習したり、比較的ページ数の多い論文を効率よく執筆したりするために大いに役立った。また、共同研究者との対面での研究打ち合わせや、研究発表や情報収集のための研究集会への参加という目的で、旅費を使用した。これらの出張は、共同研究者との直接の議論を通して研究を効率的に進め、また他の研究者との交流を通して、常に最新の情勢を把握しておくようにするために大いに役立った。

4. 研究成果

以下、文献番号[n]は「5. 主な発表論文等」における発表論文の記載順に基づく。

(I) 正則性構造理論とパラ制御解析において重要となるのが、超関数のある意味での Taylor 展開をどう記述するかである。正則性構造理論では、超関数の局所的な振る舞いに基づいた記述がなされている一方、パラ制御解析では超関数の Fourier 展開に基づいた記述がなされている。後者の記述は実解析的にも扱いやすいため、 ϕ^4_3 モデルなどの具体的な SSPDE の研究では、こ

ちらがよく使われている．一方，正則性構造理論の方では Hopf 代数に基づいた一般的な Taylor 展開の記述がなされており，多くの SSPDE における共通の性質を議論するのに適している．そのため，研究代表者はまずこのような Taylor 展開の 2 つの記述の仕方が同値であることを示すことにより，2 つの理論の間の翻訳機のようなものを作ろうとした．まず論文[6]においては，正則性構造理論からパラ制御解析への Taylor 展開の翻訳に成功した．これにより，これまでアドホックな形でしか考えられていなかったパラ制御解析にも，Hopf 代数のような統一的な代数構造が背後に存在することを示唆した．また論文[4]では，特定の条件下では論文[6]の逆方向の翻訳が可能であることを示した．これにより，少なくとも Taylor 展開の記述という面では，2 つの理論は同値であることを証明できた．

また，論文[8,5]では，この研究の応用として，パラ制御解析において重要な役割を果たす「交換子」という三重線形連続写像を， n 重変数にまで拡張して連続性を示すことに成功した．なお，[8]は $B_{\{p,q\}}$ 型の，[5]は $B_{\{p,q\}}$ 型の Besov 空間での結果である．

(II-1) 超関数空間上の非自明な確率測度を構成することは，場の量子論における重要な問題の 1 つである．Parisi と Wu (1981) に始まる確率量子化は，そのような確率測度を無限次元 Brown 運動によって駆動される SPDE の解の不変測度として構成しようという問題である．本研究では，Høegh-Krohn モデルと呼ばれる，指数関数をポテンシャルとしてもつ確率測度に対応する確率量子化方程式を考察した．この方程式には，非線形項の評価が $B_{\{p,p\}}$ 型ではなく $B_{\{p,p\}}$ 型の Besov 空間 (p は有限) でしか成り立たないという制約があり，従来の正則性構造理論やパラ制御解析の枠組みには入っていなかった．研究の結果，論文[7,2]において，Høegh-Krohn モデルに対応する SSPDE の解の(周期境界条件下での)時間大域的可解性と，その不変測度の存在を証明した．論文[7]は非線形項の評価が $B_{\{2,2\}}$ 型の場合，論文[2]は $B_{\{p,p\}}$ 型 ($1 < p < 2$) の場合である．なお，この SSPDE は Garban や Oh, Robert, Tzvetkov, Wang のグループ，また Albeverio, De Vecchi, Gubinelli のグループによっても独立に研究されていたが，論文[2]は彼らの先行研究の適用範囲を大きく上回るものであった．また，論文[9]では， \cosh のような指数関数の一次結合として表される関数をポテンシャルにもつ確率測度に対応した確率量子化を研究した．

(II-2) 相対論的場の量子論と関係する SPDE である，摩擦項をもつ確率複素 Klein-Gordon 方程式の繰り込みを研究した．この SPDE には 2 種類のパラメータが含まれており，これらのパラメータを 0 に近づけると，それぞれ Goldstone モデル，Gross-Pitaevskii モデルと呼ばれる別の SPDE に形式的には近づく．これら 3 つの SPDE はそれぞれ別の背景をもつ方程式であるが，小林と Cugliandolo の研究(2016)において，統計的な性質の類似が実験的に確かめられていた．本研究では，まずこれらの SPDE の繰り込み可能性と可解性を厳密に示すこと，さらにこれらの間の関係を数学的に証明することを目指した．その結果，論文[1]において，2 次元トラス上での KG 方程式の繰り込み可能性と，その解の不変測度の存在を示した．また，2 つのパラメータをそれぞれ 0 に近づけるときに，KG 方程式の解が Goldstone モデルや Gross-Pitaevskii モデルの解に収束することも示した．

(II-3) Bertini と Giacomin (1997) は，WASEP という 1 次元直線上をランダムに運動する多粒子系のモデルにおいて，時間と空間に関する適切なスケール変換を施すと，Kardar-Parisi-Zhang 方程式という界面成長を表す SPDE が現れることを示している．論文[3]では，そのような粒子系のスケール極限として現れる，ある準線形放物型方程式を研究し，繰り込み可能性や(周期境界条件下での)時間局所的可解性などを示した．

(II-4) KPZ 方程式は非線形項が 2 次で主要部が線形の SPDE であるが，その非線形項を一般化した SPDE は，例えば多様体上のループのランダム運動を表すモデルなどとして現れる．このような SPDE では現れる繰り込み定数の個数が膨大になるため，正則性構造理論が有用な道具として使われている．本研究では，さらに主要部を非線形にした準線形一般化 KPZ 方程式を研究した．準線形 SPDE への正則性構造理論の拡張については Gerencsér と Hairer (2019) や Otto と Weber (2019) による先行研究があるが，いずれの手法でも従来の理論を大きく書き換える必要があった．これに対し，本研究では，古典的な Levi のパラメトリクスに基づくアプローチを用い，従来の正則性構造理論を少し書き換えるだけで済む拡張を考案した．その結果，適当な前提条件下において，準線形一般化 KPZ 方程式の繰り込み可能性と，その(周期境界条件下での)時間局所的可解性を示すことができた．この論文は現在査読中である．なお，この結果はあくまで SPDE の繰り込みの解析的な部分が成功したというものであり，確率論的な部分は今後の課題として残されている．

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計9件（うち査読付論文 9件/うち国際共著 3件/うちオープンアクセス 1件）

1. 著者名 Fukuizumi Reika, Hoshino Masato, Inui Takahisa	4. 巻 35
2. 論文標題 Non relativistic and ultra relativistic limits in 2D stochastic nonlinear damped Klein-Gordon equation	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Nonlinearity	6. 最初と最後の頁 2878 ~ 2919
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1088/1361-6544/ac64e0	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Hoshino Masato, Kawabi Hiroshi, Kusuoka Seiichiro	4. 巻 185
2. 論文標題 Stochastic quantization associated with the $\exp(\varphi)_2$ -quantum field model driven by space-time white noise on the torus in the full L^1 -regime	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Probability Theory and Related Fields	6. 最初と最後の頁 391 ~ 447
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s00440-022-01126-z	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -
1. 著者名 Funaki Tadahisa, Hoshino Masato, Sethuraman Sunder, Xie Bin	4. 巻 57
2. 論文標題 Asymptotics of PDE in random environment by paracontrolled calculus	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Annales de l'Institut Henri Poincaré, Probabilités et Statistiques	6. 最初と最後の頁 1702-1735
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1214/20-AIHP1129	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する
1. 著者名 Bailleul Ismael, Hoshino Masato	4. 巻 8
2. 論文標題 Paracontrolled calculus and regularity structures II	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Journal de l'Ecole polytechnique Mathématiques	6. 最初と最後の頁 1275 ~ 1328
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.5802/jep.172	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Hoshino Masato	4. 巻 87
2. 論文標題 Iterated paraproducts and iterated commutator estimates in Besov spaces	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Advanced Studies in Pure Mathematics	6. 最初と最後の頁 239-259
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.2969/aspm/08710239	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 BAILLEUL Ismael, HOSHINO Masato	4. 巻 -
2. 論文標題 Paracontrolled calculus and regularity structures I	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Journal of the Mathematical Society of Japan	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.2969/jmsj/81878187	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Hoshino Masato, Kawabi Hiroshi, Kusuoka Seiichiro	4. 巻 21
2. 論文標題 Stochastic quantization associated with the $\exp(\Phi)_2$ -quantum field model driven by space-time white noise on the torus	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Journal of Evolution Equations	6. 最初と最後の頁 339 ~ 375
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s00028-020-00583-0	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Masato Hoshino	4. 巻 79
2. 論文標題 Commutator estimates from a viewpoint of regularity structures	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 RIMS Kokyuroku Bessatsu	6. 最初と最後の頁 179 ~ 197
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Hoshino Masato, Kawabi Hiroshi, Kusuoka Seiichiro	4. 巻 87
2. 論文標題 Tightness of the solutions to approximating equations of the stochastic quantization equation associated with the weighted exponential quantum field model on the two-dimensional torus	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Advanced Studies in Pure Mathematics	6. 最初と最後の頁 341-361
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.2969/aspm/08710341	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計31件 (うち招待講演 6件 / うち国際学会 8件)

1. 発表者名 Masato Hoshino
2. 発表標題 Paracontrolled calculus and regularity structures
3. 学会等名 Deterministic Dynamics and Randomness in PDE (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Masato Hoshino
2. 発表標題 Paracontrolled calculus and regularity structures
3. 学会等名 Harmonic Analysis, Stochastics and PDEs in Honour of the 80th Birthday of Nicolai Krylov (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Masato Hoshino
2. 発表標題 A semigroup approach to the multi-level Schauder estimate
3. 学会等名 Probability and Analysis on Random Structures and Related Topics (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Masato Hoshino
2. 発表標題 A regularity structure for the quasilinear generalized KPZ equation
3. 学会等名 Geometry, Stochastics & Dynamics (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Masato Hoshino
2. 発表標題 Stochastic quantization associated with the $\epsilon^{\alpha\phi}_2$ -quantum field model
3. 学会等名 Open Japanese-German conference on stochastic analysis and applications (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Masato Hoshino
2. 発表標題 Regularity structures for the quasilinear generalized KPZ equation
3. 学会等名 九州確率論セミナー
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Masato Hoshino
2. 発表標題 A regularity structure for the quasilinear generalized KPZ equation
3. 学会等名 確率解析とその周辺
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Masato Hoshino
2. 発表標題 A regularity structure for the quasilinear generalized KPZ equation
3. 学会等名 確率論シンポジウム
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 星野壮登
2. 発表標題 $\exp(\Phi)_2$ -量子場モデルに付随する放物型確率偏微分方程式について
3. 学会等名 熊本大学応用解析セミナー
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 星野壮登
2. 発表標題 Singular stochastic PDEs and regularity structures
3. 学会等名 調和解析と非線形偏微分方程式
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Masato Hoshino
2. 発表標題 Paracontrolled calculus and regularity structures
3. 学会等名 The 10th International Conference on Stochastic Analysis and its Applications (国際学会)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 星野壮登
2. 発表標題 Non relativistic and ultra relativistic limits in 2d stochastic nonlinear damped Klein-Gordon equation
3. 学会等名 確率解析とその周辺
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Masato Hoshino
2. 発表標題 Paracontrolled calculus and regularity structures
3. 学会等名 Higher Structures Emerging from Renormalisation (国際学会)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 星野壮登
2. 発表標題 Non relativistic and ultra relativistic limits in 2d stochastic nonlinear damped Klein-Gordon equation
3. 学会等名 大規模相互作用系の確率解析
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Masato Hoshino
2. 発表標題 Paracontrolled calculus and regularity structures
3. 学会等名 Quasi-linear PDEs in fluids II (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 星野壮登
2. 発表標題 Iterated paraproducs and commutator estimates from a viewpoint of regularity structures
3. 学会等名 第37回九州における偏微分方程式研究集会
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 星野壮登
2. 発表標題 Stochastic quantization associated with the $\exp(\alpha\phi)_2$ -quantum field model
3. 学会等名 大阪大学確率論セミナー
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 星野壮登
2. 発表標題 Commutator estimates from a viewpoint of regularity structures
3. 学会等名 確率解析とその周辺
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 星野壮登
2. 発表標題 Stochastic quantization associated with the $\exp(\alpha\phi)_2$ -quantum field model
3. 学会等名 確率論シンポジウム
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 星野壮登
2. 発表標題 Stochastic quantization associated with the two dimensional $\exp(\phi)$ -quantum field model
3. 学会等名 量子渦と非線形波動
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 星野壮登
2. 発表標題 Stochastic quantization associated with the $\exp(\alpha\phi)_2$ -quantum field model
3. 学会等名 量子場の数理とその周辺
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 星野壮登
2. 発表標題 Paracontrolled calculus and regularity structures
3. 学会等名 CIRM conference "Pathwise Stochastic Analysis and Applications"
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 星野壮登
2. 発表標題 Paracontrolled calculus and regularity structures
3. 学会等名 大阪大学確率論セミナー
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 星野壮登
2. 発表標題 Paracontrolled calculus and regularity structures
3. 学会等名 関西確率論セミナー
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 星野壮登
2. 発表標題 Global well-posedness of some singular stochastic PDEs
3. 学会等名 九州関数方程式セミナー
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 星野壮登
2. 発表標題 Coupled KPZ equations
3. 学会等名 2019 IMS-China International Conference on Statistics and Probability
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 星野壮登
2. 発表標題 A relation between modelled distributions and paracontrolled distributions
3. 学会等名 Equadiff 2019
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 星野壮登
2. 発表標題 Paracontrolled Calculus and Regularity Structures
3. 学会等名 The 12th Mathematical Society of Japan
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 星野壮登
2. 発表標題 Paracontrolled calculus and regularity structures
3. 学会等名 Japanese-German Open Conference on Stochastic Analysis 2019
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 星野壮登
2. 発表標題 Paracontrolled calculus and regularity structures
3. 学会等名 確率解析とその周辺
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 星野壮登
2. 発表標題 Paracontrolled calculus and regularity structures
3. 学会等名 確率論シンポジウム
4. 発表年 2019年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
--	---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関			
フランス	Universite de Rennes 1			