

令和 3 年 6 月 7 日現在

機関番号：12601

研究種目：研究活動スタート支援

研究期間：2018～2020

課題番号：18H05829・19K21021

研究課題名（和文）Landau-Ginzburg模型のmoduliと周期

研究課題名（英文）Moduli and periods for Landau-Ginzburg models

研究代表者

社本 陽太（Shamoto, Yota）

東京大学・カブリ数物連携宇宙研究機構・特任研究員

研究者番号：50823647

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 1,500,000円

研究成果の概要（和文）：本研究においては、Landau-Ginzburg(以下、LG)模型と呼ばれる、代数多様体とその上の関数の組についての変形とその(指数的)周期について調べました。研究の指針は、ミラー対称性予想と呼ばれるFano多様体との対応関係です。主な研究成果は、1. 指数的周期と関連の深い、指数型の頂点作用素の代数構造について、プレプリントを執筆したこと。2. Fano多様体の同変量子コホモロジーに対応すべき、LG模型の変形から周期積分を通じて得られる微分・差分加群に対するStokes構造についてのプレプリントを執筆したこと。です。

研究成果の学術的意義や社会的意義

本研究は、数理物理学におけるミラー対称性や共形場理論のアイデアに基づく数学的構造の研究であるため、その進展、理解の深まりは、これらの理論に対するより明確な理解につながると考えている。さらに、差分方程式と呼ばれる離散的な対象に対する代数的なStokes構造の理論を確立することは、学術的な意義もあると考えている。

研究成果の概要（英文）：We have studied a geometric object, called a Landau-Ginzburg (LG) model, which consists of an algebraic variety and a regular function on it, and its period integral. The main source of idea is the mirror symmetry conjecture, which relates LG model with Fano manifolds. The main results are, 1. a preprint on an algebraic structure of exponential type vertex operators, which closely related to exponential period. 2. a preprint on the Stokes structure for differential-difference modules obtained from the period integral for LG models which should correspond to equivariant quantum cohomology groups for Fano manifolds.

研究分野：複素幾何学

キーワード：ミラー対称性 Landau-Ginzburg model 周期積分

1. 研究開始当初の背景

- (1) 代数多様体とその上の関数の組で、いくつかの条件を満たすものを、Landau-Ginzburg 模型(以下、LG 模型)と呼ぶ。この複素幾何学的対象は、代数多様体が代数的トーラス、関数が Laurent 多項式である場合に、ミラー対称性予想の文脈で導入された。その後、そのコンパクト化として、従順にコンパクト化された LG 模型と言う概念が、同じくミラー対称性の文脈で Katzarkov-Kontsevich-Pantev によって導入された。この意味の LG 模型が、本研究の主な研究対象である。
- (2) LG 模型に対する重要な不変量に、そのホモロジー及びコホモロジーがあり、その双対性の表現として、指数的な周期積分の概念が考えられる。この概念は、ミラー対称性予想の文脈においても、複素幾何学においても重要な概念である。特に、従来の代数多様体の周期との違いとして、関連する微分方程式に不確定特異型の特異点が現れ、Stokes 現象などの新しい現象が、周期積分と密接に関連する。関連する Hodge 構造として、不確定特異型 Hodge 構造という概念が考案されている。

2. 研究の目的

本研究の目的は、LG 模型を、複素変数に沿って研究した時の、対応する周期積分の様子を記述することにある。この問題は、

- (1) どのような LG 模型のクラスを考えるか、
- (2) 複素パラメータの空間(モジュライ空間)としてどのようなものを考えるか、
- (3) 周期積分の性質をどこまで詳しく記述するか。

によって、様々なアプローチや答えがありうる。

本研究において、当初念頭にあった問題は、LG 模型のクラスとして、最も一般的なものを考え、その形式的な変形空間をモジュライ空間とし、その上の平坦構造を考える問題や、LG 模型のクラスとして、2次元の有理楕円曲面であって、del Pezzo 曲面とミラー対称性の関係にあるものについて、その上の Frobenius 構造と、そのグローバルな性質を調べる、という二つの場合であったが、それら以外の場合として、次の場合について、興味深い結果を得られたので、そちらを先にまとめることを目標とした。

まず、共形場理論において、不確定特異性が現れる場合に、代数曲線上の点の配置空間とその上に定まる関数としての LG 模型を考えて、その頂点作用素代数との関連を調べた。次に、LG 模型として、Riemann 面上の有理型関数を考え、ミラー対称性の観点から、「同変」方向への変形空間を考え、それらに対する差分方程式の Stokes 構造を研究した。

3. 研究の方法

本研究においては、上の目的を達成するため、

- Fano 多様体と LG 模型の間のミラー対称性予想と呼ばれる、理論物理学に端を発する予想における知見、
- 代数的 de Rham コホモロジー理論とその不確定特異型 Hodge 理論といった、周期積分を調べる上でスタンダードな理論、
- Deligne にはじまる Stokes 構造の理論と言う、不確定特異点における周期積分の性質を記述する理論、
- 共形場理論における不確定特異性という新しい視点などの知見、理論、手法等を用いた。

まず、ミラー対称性とは、理論物理学における超弦理論に端を発する予想であり、その数学的な定式化は、完全な形ではなされていないが、既に明確に定式化、証明がなされているものや、少なくとも対応関係については、ある程度見通しが立っているものも多い。それらの視点から、LG 模型の理論についても、何が成り立つべきか、や、どのような対象が興味深い研究対象か、などについての、有益なアイデアが得られる。本研究では、これを大いに活用した。

次に、代数的 de Rham コホモロジー理論については、古典的な理論とは異なり、関数による指数的な捻りが加わっている点が比較的新しく、LG 模型を研究する上では、基本的な手法となっている。また、このコホモロジー群は、不確定特異型 Hodge 構造と呼ばれる構造の具体例を与えているという点においても、興味深い。これらの理論についての知見も、本質的な部分で用いることとなった。さらに、Stokes 構造の既存の理論については、新たな Stokes 構造の理論を構築する上でのロールモデルとして、大いに活用した。また、共形場理論の不確定特異性についても、LG 模型の新たな側面を研究するために、刺激的な視点であったと言える。

4. 研究成果

主な研究成果は、二つのプレプリントを執筆したこと、及び、それらの結果について幾つかの研究集会で講演を行なったことが挙げられる。

- (1) まず、一本目のプレプリントは、池田氏との共著である Akishi Ikeda and Yota Shamoto, “Irregular vertex algebras”. ここでは、共形場理論における不確定特異性というテーマに沿って、多項式函数による指数的な捻りをした頂点作用素の代数を調べた。これは、不確定特異型 KZ 方程式などの、代数多様体とその上の関数の族の指数的周期積分を調べる上でのスタートラインになると考えている。
- (2) 次に、二本目のプレプリントは、単著である Yota Shamoto, “Stokes filtered sheaves and differential-difference modules”. この論文では、Fano 多様体と LG 模型の間のミラー対称性の視点を、代数的トーラスによる群作用の同変コホモロジー群に対して適用することで考えられる、微分差分方程式について調べた。主に考えたのは、LG 模型として、Riemann 面上の有理型関数を考えた時の周期積分であって、これを、もう一つの有理型関数を用いて変形した空間上に定まる微分差分方程式について、その幾何学的な解空間の Stokes 構造を記述した。

現在、(1)は、さらに不確定特異型共形ブロックの研究へと研究対象を広げる方向へと議論が深まっていており、(2)の結果についても、一般化や、ミラー対称性予想とより関連の深い応用へと研究を進めている。さらに、当初の目的の一つであった、従順にコンパクト化された LG 模型について、その形式的な変形空間やその上の平坦構造については、上の二つの結果に比べて、新規性が薄いため(専門家の間では、できるであろうことが意識されているという認識だったため)後回しにしてきたが、その後の幾つかの発展や、更なる結果が得られる可能性が現れたため、検討を始めている。以上のように、本研究課題については、基礎的な部分についての仕事を形にすることができたことに加え、今後更なる発展が見込める段階まで研究できた、という点も、成果であったと言える。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計2件（うち査読付論文 2件/うち国際共著 0件/うちオープンアクセス 1件）

1. 著者名 Shamoto Yota	4. 巻 54
2. 論文標題 Hodge-Tate Conditions for Landau-Ginzburg Models	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Publications of the Research Institute for Mathematical Sciences	6. 最初と最後の頁 469 ~ 515
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.4171/PRIMS/54-3-2	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Sanda Fumihiko, Shamoto Yota	4. 巻 70
2. 論文標題 An analogue of Dubrovin's conjecture	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Annales de l'Institut Fourier	6. 最初と最後の頁 621 ~ 682
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.5802/aif.3321	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -

〔学会発表〕 計5件（うち招待講演 5件/うち国際学会 3件）

1. 発表者名 社本陽太
2. 発表標題 Irregular vertex algebras
3. 学会等名 Categorical and Analytic Invariants in Algebraic Geometry VII (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 社本陽太
2. 発表標題 Stokes structure on some differential-difference modules
3. 学会等名 Monodromy and hypergeometric functions (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 社本陽太
2. 発表標題 Hodge structures on tame compactified Landau-Ginzburg models
3. 学会等名 Mirror Symmetry for Fano Manifolds and Related Topics (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 社本陽太
2. 発表標題 Stokes filtered sheaves and differential-difference modules
3. 学会等名 Algebraic differential geometry seminar (招待講演)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 社本陽太
2. 発表標題 Stokes filtered sheaves and differential-difference modules
3. 学会等名 ミラー対称性の諸相2020 (招待講演)
4. 発表年 2020年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8 . 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------