

令和 5 年 4 月 28 日現在

機関番号：11101

研究種目：研究活動スタート支援

研究期間：2019～2022

課題番号：19K23396

研究課題名（和文）Hyperlogarithmの関係式を用いた、多重ゼータ値の関係式の研究

研究課題名（英文）A study of relations among multiple zeta values using ones among hyperlogarithm

研究代表者

川崎 菜穂（KAWASAKI, Naho）

弘前大学・理工学研究科・助教

研究者番号：40846854

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 2,200,000円

研究成果の概要（和文）：本研究では、荒川-金子型多重ゼータ関数とEuler-Zagier型多重ゼータ関数の関係に明示的な式を与え、さらに補題として、multi-polylog関数の関数関係式も与えた。そして、この明示公式の系として、荒川-金子型多重ゼータ関数の特殊値に対する反転公式も得られた。金子-津村型ゼータ関数の正の整数点に関する和公式が予想されていた。本研究では、この予想に肯定的な証明を与えた。証明には、金子-津村型ゼータ関数の正の整数点での値が反転公式をもつことおよび多重ゼータスター値で表示できることを用いる。その他、本研究及びこれまでに得られた研究結果を紹介する講演発表を行った。

研究成果の学術的意義や社会的意義

multi-polylog関数の関数関係式の証明には、2色半順序集合上の反復積分表示が鍵となったが、これは多重ゼータ値の研究で導入されたものである。すなわち、2色半順序集合上の反復積分表示が多重ゼータ関数の研究に役立ったことを表しており、今回の研究によってさらなる応用が期待できることとなった。また、金子-津村型ゼータ関数の正の整数点に関する和公式は、金子-津村型ゼータ関数の多重化やその類似への応用も期待できると考えており、とても重要な結果だと言える。

研究成果の概要（英文）：Kaneko and Tsumura proved that multiple zeta functions of Arakawa-Kaneko type can be expressed as a  $\mathbb{Q}$ -linear combination of products of the ones of Euler-Zagier type and multiple zeta values. In this talk, we give an explicit formula to the above mentioned relation. Moreover, as a key of its proof, we also give certain functional equations among multi-polylogarithm functions explicitly. We also give a sum formula for the positive integer points of the Kaneko-Tsumura zeta function. The proof uses the fact that the positive integer points of the Kaneko-Tsumura zeta function have a duality formula and a representation by multiple zeta star values.

研究分野：整数論

キーワード：多重ゼータ値 多重ゼータスター値 Bernoulli数 Hyperlogarithm 反復積分

## 1. 研究開始当初の背景

多重ゼータ値に関する歴史と背景を手短に述べる。Zagier は 1994 年の論文の中で、多重ゼータ値が生成する有理数体上のベクトル空間の次元を数値実験により予想した(次元予想)。そして、寺杣(2002)、Deligne-Goncharov(2005)は、その次元の上限が Zagier の予想次元まで下げられることをモチーフ論を用いて証明した。彼らの結果は多重ゼータ値の間の具体的な関係式を議論したものではないため、多重ゼータ値の関係式の全体像を把握し、多重ゼータ値の張る  $\mathbb{Q}$ -代数の構造を解明することが重要課題の一つとなっている。

多重ゼータ値の間に成り立つすべての線形関係式を生成すると予想されている大きな関係式族として次の五つが知られている；積分級数等式、一般複シャッフル関係式、川島関係式、合流関係式、アソシエーター関係式。ただしこれらがすべての関係式を導くことの証明は、リーマンゼータ値の独立性という非常に高度な未解決問題を含んでおり、困難を極める。上記の五つの関係式の同値性を示すことはより現実的であり、構造解明への重要な手掛かりともなるため、有意義な課題と考え取り組み続けている。

## 2. 研究の目的

多重ゼータ値のすべての  $Q$ -線形関係式を与えると予想されている五つの関係式族の相互関係の解明、および新たな関係式族の開拓が申請者の目標である。特に、多重ゼータ値を特殊値にもつ hyperlogarithm の積分級数等式を主軸とした研究を行う。さらに、双対公式導出問題の解明についても進展させる。本研究には先行研究での手法に加え、これまで考えられていなかった独自のアプローチを用いる。

## 3. 研究の方法

研究の方法を四つ((A)-(D))に分けて説明する。

研究(A)：積分級数等式と合流関係式の同値性の究明。合流関係式からは一般複シャッフル関係式および双対公式が導出できており、このことから、川島関係式をも導出できる。積分級数等式から合流関係式の導出を肯定的に証明することによって、積分級数等式と合流関係式が同値となるが、他に次の二つの関係が明らかになる。第一は、合流関係式の上記の性質より、積分級数等式から双対公式が導出できることとなり、研究(B)で述べた事柄により、双対公式導出問題を肯定的に解決することができる。第二は、積分級数等式から合流関係式を介して一般複シャッフル関係式が導出できることである。これは、シャッフル関係式を仮定する必要がなくなることを意味している。

自身の先行研究で得た、2色半順序集合上の反復積分表示の一般化を用いて、合流関係式を再証明することを最初の目標とする。従来の2色半順序集合上の反復積分表示は、多重ゼータ(スター)値の反復積分表示を包含しており、多重ゼータ値の積分級数等式に用いられているものである。合流関係式は、広瀬-佐藤によって、多重ゼータ値を特殊値にもつ hyperlogarithm の反復積分表示を用いて証明されている。ここでは、自身の先行研究で得た山本積分表示を用いて、合流関係式の証明を試みる。最終的には、自身の先行研究で得た2色半順序集合上の反復積分表示の一般化を用いて、積分級数等式から合流関係式を導出することを目標とする。hyperlogarithm の関係式から多重ゼータ値の関係式を得る方法は先行研究にはなく、独自のアプローチである。

研究(B)：一般複シャッフル関係式と双対公式の関係解明。一般複シャッフル関係式から川島関係式を導出できるかどうかは未解決であるが、一般複シャッフル関係式+双対公式から川島関係式が導出されることはすでに証明されている。このため、課題の双対公式導出問題を肯定的に解決することができれば、一般複シャッフル関係式から川島関係式を導出できることがわかる。また、金子-山本によって、シャッフル関係式(または調和関係式)のもとで正しいことがわかっている。シャッフル関係式(または調和関係式)および双対公式のもとで正しいことがわかっている。双対公式導出問題を肯定的に解決することを改善できる。また、積分級数等式から双対公式を導出できれば、双対公式導出問題が肯定的に解決される。双対公式導出問題の肯定的解決を含む。

この課題に対し、次の二つのアプローチを用いて、単独の多重ゼータ値に対する双対公式導出問題に取り組む。第一は、梶川(2006)および自身の先行研究で用いたアプローチであり、Hoffman(1997)による多重ゼータ値の代数的定式化の理論に基づく代数レベルの研究である。すなわち、単独の多重ゼータ値に対する双対公式を一般複シャッフル関係式の一部と見なせるような式を無数に存在する代数的表記の中で独自の手法により追究する。第二は、第一とは異なり、積分級数等式から双対公式を導出するアプローチである。第一のアプローチと同様に、単独の多重ゼータ値に対する双対公式を積分級数等式の一部と見なせるような式を独自の手法により追究する。最終的には双対公式導出問題の全面解決を目標とする。双対公式導出問題に対して、申

請者の先行研究に用いた第一のアプローチに、新たに第二のアプローチも加えて取り組むことは独自の方法であり、研究(B)の特色と言える。

研究(C)：多重ゼータスター値の新たな一般複シャッフル関係式の定式化の追究。宗田(2009)とは異なる、多重ゼータスター値の一般複シャッフル関係式を与えることを目標とする。山本による多重ゼータスター値の反復積分表示を用いて、多重ゼータスター値の複シャッフル関係式の証明に取り組む。得られた関係式と正規化基本定理を用いて、課題解決に至る計画である。

研究(D)：modified  $sq$ -多重ゼータ値の一般複シャッフル関係式の究明。多重ゼータ値の $sq$ -類似の一つである modified  $sq$ -多重ゼータ値の一般複シャッフル関係式を与えることを目標とする。modified  $sq$ -多重ゼータ値の正規化基本定理を与え、複シャッフル関係式(竹山(2013))を用いて、研究(D)の目標である一般複シャッフル関係式の証明を試みる。

#### 4. 研究成果

荒川-金子型多重ゼータ関数と Euler-Zagier 型多重ゼータ関数の関係に明示的な式を与え、さらに補題として、multi-polylog 関数の関数関係式も与えた。そして、この明示公式の系として、荒川-金子型多重ゼータ関数の特殊値に対する反転公式も得られた。荒川-金子型多重ゼータ関数とは、multi-polylog 関数を用いて、Riemann ゼータ関数を多重化した1変数関数である。補題を示すには、2色半順序集合上の反復積分表示が鍵となったが、これは多重ゼータ値の研究で導入されたものである。すなわち、2色半順序集合の反復積分表示が多重ゼータ関数の研究に役立ったことを表しており、今回の研究によってさらなる応用が期待できることとなった。本研究では他にも、金子-津村型ゼータ関数の正の整数点に関する和公式を与えた。金子-津村型ゼータ関数とは、polylog 関数を用いて、Riemann ゼータ関数を多重化した1変数関数である。Riemann ゼータ関数の負の整数点の特殊値には Bernoulli 数が現れることが知られているが、このゼータ関数の負の特殊値にも Bernoulli 数の一般化である poly-Bernoulli 数が現れる。金子-津村型ゼータ関数の正の整数点に関する和公式が予想されていた。本研究では、この予想に肯定的な証明を与えた。証明には、金子-津村型ゼータ関数の正の整数点での値が反転公式をもつことおよび多重ゼータスター値で表示できることを用いる。この反転公式は大野泰生氏(東北大学)との共同研究において、2色半順序集合上の反復積分表示を用いて再証明を与えていたものである。今回の成果は、金子-津村型ゼータ関数の多重化やその類似への応用も期待できると考えており、とても重要な結果だと言える。その他、本研究及びこれまでに得られた研究結果を紹介する講演発表を行った。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計1件（うち査読付論文 1件 / うち国際共著 0件 / うちオープンアクセス 1件）

1. 著者名 Naho Kawasaki, Kojiro Oyama	4. 巻 -
2. 論文標題 Cyclic sums of finite multiple zeta values	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Acta Arithmetica	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.4064/aa190326-1-10	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -

〔学会発表〕 計15件（うち招待講演 8件 / うち国際学会 7件）

1. 発表者名 川崎菜穂
2. 発表標題 $\widehat{\zeta}_A$ -有限多重ゼータ値の巡回和公式
3. 学会等名 第14回 数論女性の集まり（国際学会）
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 川崎菜穂
2. 発表標題 Arakawa-Kaneko zeta values and multiple integrals
3. 学会等名 九大多重ゼータセミナー
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 川崎菜穂
2. 発表標題 An explicit formula of the relation between multiple zeta functions of Arakawa-Kaneko and Euler-Zagier types
3. 学会等名 第15回 ゼータ若手研究集会（国際学会）
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 川崎菜穂
2. 発表標題 Multiple zeta functions of Arakawa-Kaneko and Euler-Zagier types
3. 学会等名 第4回 青葉山ゼータ研究集会
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 川崎 菜穂
2. 発表標題 有限多重ゼータ値の巡回和公式
3. 学会等名 第12回数論女性の集まり(国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 川崎 菜穂
2. 発表標題 Hyperlogarithmの積分級数等式
3. 学会等名 京都産業大学理学部数理科学科談話会(招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 川崎 菜穂
2. 発表標題 Cyclic sum of $\widehat{\mathcal{A}}$ -finite multiple zeta values
3. 学会等名 RIMS研究集会「多重ゼータ値の諸相」(招待講演)(国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 川崎 菜穂
2. 発表標題 $\widehat{\mathcal{A}}$ -有限多重ゼータ値の巡回和について
3. 学会等名 第26回早稲田大学整数論セミナー（招待講演）
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 川崎 菜穂
2. 発表標題 The relation among MZFs of Arakawa-Kaneko and Euler-Zagier types
3. 学会等名 RIMS共同研究（公開型）「多重ゼータ値の諸相」（招待講演）（国際学会）
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 川崎 菜穂
2. 発表標題 荒川-金子型と Euler-Zagier 型, 2 つの多重ゼータ関数の関係式
3. 学会等名 第15回 数論女性の集まり（国際学会）
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 川崎 菜穂
2. 発表標題 Multiple zeta functions of Arakawa-Kaneko type and multiple integrals
3. 学会等名 九大多重ゼータセミナー（招待講演）
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 川崎 菜穂
2. 発表標題 荒川-金子型多重ゼータ関数と2色半順序集合に付随する積分表示
3. 学会等名 名古屋組合せ論セミナー（招待講演）
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 川崎 菜穂
2. 発表標題 荒川-金子型, Euler-Zagier型, $2s$ つの多重ゼータ関数の関係について
3. 学会等名 日本数学会2022年度秋季総合分科会
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 川崎 菜穂
2. 発表標題 多重ゼータ値と2色半順序集合上の積分表示
3. 学会等名 弘前大学談話会（招待講演）
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Naho Kawasaki
2. 発表標題 On multiple zeta functions of Arakawa-Kaneko and Euler-Zagier types
3. 学会等名 Zeta functions and their representations（招待講演）（国際学会）
4. 発表年 2023年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
--	---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------