

令和 3 年 6 月 3 日現在

機関番号：13901

研究種目：研究活動スタート支援

研究期間：2019～2020

課題番号：19K23403

研究課題名（和文） $W^*$ -半群を用いたE0-半群の分類研究課題名（英文）Classification of E0-semigroups and  $W^*$ -semigroups

研究代表者

澤田 友佑（Sawada, Yusuke）

名古屋大学・多元数理科学研究科・博士研究員

研究者番号：20851439

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 2,000,000円

研究成果の概要（和文）： $W^*$ -双加群の成すプロダクトシステム( $W^*$ -プロダクトシステム)はvon Neumann環上のE0-半群の不変量となることが知られている。本研究ではvon Neumann環M上の $W^*$ -プロダクトシステムとMのcommutant上の $W^*$ -プロダクトシステムの関係性を明らかにした。また、Wildbergerの構成法によって良い対称性のあるグラフ上のランダムウォークには超群が対応する。そのようなグラフ上のランダムウォークの距離分布を、対応する超群の代数構造を用いて調べた。さらに、距離集合上の開放系量子ウォークに対して、ランダムウォークの距離分布と超群に関する結果の類似を得た。

研究成果の学術的意義や社会的意義

$W^*$ -プロダクトシステムがArvesonのプロダクトシステムの拡張であることがより明瞭な形で明らかになり、Arvesonのプロダクトシステムの理論がどのように拡張され得るか考察しやすくなった。また、超群の積を計算することによって、ランダムウォークの距離分布が従来の方法よりも簡単に計算できるようになった。さらに、距離集合上の開放系量子ウォークと超群の理論の基礎を築くことが出来た。

研究成果の概要（英文）：It is known that product systems of  $W^*$ -bimodules ( $W^*$ -product systems) are invariant for E0-semigroups on von Neumann algebras. I clarified a relationship between  $W^*$ -product systems over von Neumann algebra M and ones over the commutant of M. Also, we can derive a hypergroup from a random walk on a graph equipped with a good symmetry by Wildberger's method. I investigated distance distributions of such a random walk in the view point of the algebraic structure of the hypergroup associated with the random walk. I obtained an analogous result of the above for an open quantum random walk on a distance set.

研究分野：作用素環

キーワード：E0-半群 プロダクトシステム ランダムウォーク 超群

## 1. 研究開始当初の背景

量子系の物理量はある Hilbert 空間上の自己共役作用素によって記述され、その枠組みの中で Hilbert 空間  $H$  上の有界線形作用素全体からなる環  $B(H)$  の部分環(作用素環)に焦点が当てられた。 $B(H)$  の単位的  $*$ -部分環で弱作用素位相に関して閉じたものは von Neumann 環と呼ばれ、私の研究対象は von Neumann 環上の  $E_0$ -半群である。 $E_0$ -半群は von Neumann 環上の  $*$ -準同型写像の成す半群であり、これは量子系における非可逆な力学系とみなされる。

Arveson はプロダクトシステムを導入し、 $B(H)$  上の  $E_0$ -半群とプロダクトシステムを(コサイクル共役を除いて)1対1に対応させた。プロダクトシステムは Hilbert 空間たちの成す族であり、テンソル積に関して半群になっているものである。一般の von Neumann 環上の  $E_0$ -半群に関しては、Bhat, Skeide, Liescher らによって Hilbert 双加群(または von Neumann 双加群)の成すプロダクトシステムを用いて研究が進められてきた。私は von Neumann 環が両側から作用する Hilbert 空間である  $W^*$ -双加群に着目し、その立場から von Neumann 環上の  $E_0$ -半群の研究を行なった。私の以前の研究によって、 $W^*$ -双加群の成すプロダクトシステム( $W^*$ -プロダクトシステム)の概念が導入され、一般の von Neumann 環上の  $E_0$ -半群の新しい不変量であることが示された。

## 2. 研究の目的

Arveson は  $I$ 型と呼ばれるプロダクトシステムに指数を導入し、その指数が  $I$ 型プロダクトシステム、したがって対応する  $I$ 型  $E_0$ -半群の完全不変量となることを示した。私の研究目的は、 $W^*$ -プロダクトシステムを用いて Arveson による  $B(H)$  上の  $E_0$ -半群の指数理論を、一般の von Neumann 環上の  $E_0$ -半群に拡張することである。

## 3. 研究の方法

$W^*$ -双加群のプロダクトシステムを詳しく調べ、指数が定義され得る  $W^*$ -プロダクトシステムのクラスを決定する。Arveson は  $I$ 型プロダクトシステムはみな Fock 空間から生成されるプロダクトシステムと同型となることを示し、von Neumann 双加群のプロダクトシステムに関してこの類似が得られている。これらの構成法を比較・検証し  $W^*$ -プロダクトシステムに  $I$ 型のクラスを導入する。そして  $W^*$ -双加群の技術を援用することによりそのようなプロダクトシステムの不変量となる指数を導入する。

また、伸張を用いて  $CP_0$ -半群から  $E_0$ -半群が構成され、 $CP_0$ -半群と  $W^*$ -プロダクトシステムの対応が知られている。可換 von Neumann 環上の離散的な  $CP_0$ -半群の具体例として、ランダムウォークなどの Markov 連鎖から誘導される半群がある。グラフ上のランダムウォークの距離分布の理解を動機としてランダムウォークと超群に関する研究も行なった。

## 4. 研究成果

(i)本研究では  $W^*$ -プロダクトシステムが Arveson のプロダクトシステムのどのような一般化となっているかを詳しく調べ、von Neumann 環の commutant を用いて明らかにした。具体的には、von Neumann 環  $M$  上の  $W^*$ -プロダクトシステムの圏は  $M$  の commutant である  $M'$  上の  $W^*$ -プロダクトシステムの圏と圏同値となることが分かった。この対応により、 $B(H)$  上の  $W^*$ -プロダクトシステムが Arveson のプロダクトシステムとみなされる。本結果をこれまでに得られていた結果に追加し学術雑誌 *International Journal of Mathematics* に掲載された([3])。

本研究の過程で、本来想定していた方法で導入される  $I$ 型  $W^*$ -プロダクトシステムたちは、Arveson の  $I$ 型プロダクトシステムの類似として構築された von Neumann 双加群のプロダクトシステムたちと同値な部分圏を構成すると予想された。 $W^*$ -プロダクトシステムの理論の整備のためにもこの予想を解決することは重要であると思われる。そのような von Neumann 双加群の成すプロダクトシステムの"指数"は numerical ではなく、特定の von Neumann 双加群によって特徴付けるといったものであったが、それに対応する  $W^*$ -双加群の然るべき意味の次元として  $W^*$ -プロダクトシステムに numerical な指数を導入できるのではないかと思われる。

(ii)私はランダムウォークの距離分布と超群に関する研究も行なった。超群とは群を確率論的に拡張した概念であり、ある種の作用素環として記述される。Wildberger は特別なグラフからその上のランダムウォークを用いて超群を得る方法を確立した。任意のグラフから超群が得られるわけではなく、距離正則なグラフは彼の方法で超群を生成することが分かっている。そこで、遠藤氏、三村氏との共同研究[1]によって、距離正則グラフ上のランダムウォークの距離分布が、対応する超群の積構造に現れることを示した。その過程で、グラフの距離正則性よりも弱いある対称性が、超群を生成するための十分条件となることを予想した。本結果は学術雑誌 *Mathematica Scandinavica* に掲

載された.

(iii)一階氏,大野氏との共同研究[2]によって,上記の弱い対称性を持つグラフが超群を構成するための新たな十分条件を得た.その条件とは,ランダムウォークから得られる確率遷移行列がある意味でグラフの隣接行列によって記述されるというものである.

また,Wildbergerによるグラフ上のランダムウォークから超群を構成する方法に影響を受け,[4]において,距離集合上の開放系量子ウォークから超群を構成する方法を導入した.グラフ上のランダムウォークの場合と異なり,任意の超群はある距離集合上の開放系量子ウォークによって実現されることが分かった.また,距離集合上の開放系量子ウォークの分布を超群の観点から調査し,分布の代数的な計算方法を導入した.

これらの結果はいずれも学術雑誌に投稿済みで現在審査中である.

#### 引用文献

[1] K. Endo, I. Mimura, Y. Sawada, Hypergroups and distance distributions of random walks on graphs, *Math. Scand*, vol. 127 (2021), no. 1, pp. 43-62.

[2] T. Ikkai, H. Ohno, Y. Sawada, The adjacency matrices and the transition matrices related to random walks on graphs, preprint (2020). arXiv:2012.11880.

[3] Y. Sawada, A Connes correspondence approach to the dilation theory, *Internat. J. Math.*, vol. 31 (2020), 2050040, 30pp.

[4] Y. Sawada, Hypergroup structures of open quantum random walks on distance sets, preprint (2020). arXiv:2009.09166.

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計2件（うち査読付論文 2件 / うち国際共著 0件 / うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 Yusuke Sawada	4. 巻 31
2. 論文標題 A Connes correspondence approach to the dilation theory	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 International Journal of Mathematics	6. 最初と最後の頁 30p
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1142/S0129167X20500408	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Kenta Endo, Ippei Mimura, Yusuke Sawada	4. 巻 127
2. 論文標題 Hypergroups and distance distributions of random walks on graphs	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Mathematica Scandinavica	6. 最初と最後の頁 43-62
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.7146/math.scand.a-122932	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計4件（うち招待講演 0件 / うち国際学会 0件）

1. 発表者名 澤田友佑
2. 発表標題 E0-semigroups, dilations and product systems of $W^*$ -bimodules
3. 学会等名 RIMS共同研究, 作用素環論の最近の発展
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 澤田友佑
2. 発表標題 E0-semigroups and product systems of $W^*$ -bimodules
3. 学会等名 第54回関数解析研究会
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 澤田友佑
2. 発表標題 Distance distributions of random walks and open quantum random walks
3. 学会等名 Workshop on " Non-commutative Probability and Related Fields
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 澤田友佑
2. 発表標題 Hypergroups and random walks on graphs
3. 学会等名 山上滋先生退官記念研究集会
4. 発表年 2021年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------