

令和 5 年 6 月 15 日現在

機関番号：18001

研究種目：研究活動スタート支援

研究期間：2019～2022

課題番号：19K23406

研究課題名（和文）円の自己同相写像の成す有限生成群の剛性について

研究課題名（英文）On the rigidity of finitely generated groups of homomorphisms of the circle

研究代表者

加藤 本子 (Kato, Motoko)

琉球大学・教育学部・准教授

研究者番号：00847593

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 1,900,000円

研究成果の概要（和文）：本研究では、円の自己同相写像のなす群を題材に、非正曲率距離空間への群作用の固定点性質に関する研究を行った。本研究では、ring群と呼ばれる群がその交換子部分群の有限生成部分群に対して相対的な固定点性質を持つことを示した。応用として、Richard Thompson群 T の一般化であるHigman-Thompson群 T_n に対して、被覆次元有限のCAT(0)空間へのsemi-simpleな群作用に対して固定点性質を持つことを示した。証明の過程で、 T_n の新たな有限生成系を構成し、 T_n がring群の構造を持つことを示した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

一般に固定点性質を持つ群の具体例を構成するのは難しいが、Richard Thompson群 T 、 V はそのような数少ない具体例の一つとして知られている。しかし、 T_n が同様の固定点性質を持つかどうかは知られていなかった。本研究では、 T_n がring群の構造を持つことを示した。この過程で、 T_n の新たな有限生成系を構成した。この生成系は、 T_n の自己相似性を反映するという意味で性質の良いものである。さらにそれを用いて、 T に対する証明の一般化の仮定における技術的な困難を回避することに成功した。

研究成果の概要（英文）：On groups of homomorphisms of the circle, we studied fixed point properties of group actions on non-positively curved spaces. In this research, we showed relative fixed point properties for groups called ring groups, with respect to finitely generated subgroups of their commutator subgroups. As an application, we showed that Higman-Thompson groups T_n , which are generalizations of Richard Thompson's group T , admit fixed point properties for semi-simple actions on CAT(0) spaces of finite covering dimension. In the proof, we constructed new finite generating sets for every T_n and showed that every T_n has a structure of a ring group.

研究分野：幾何学

キーワード：固定点性質 CAT(0)空間への群作用 円の自己同相写像 Richard Thompsonの群

1. 研究開始当初の背景

多様体 M への群作用,あるいは M の自己同相群の部分群構造は, M が 1 次元の場合にさえ未解明である. この研究では M が単位円 S^1 の場合を考え, S^1 の向きを保つ自己同相群 $\text{Homeo}^+(S^1)$ の, 「強い剛性」を持つ可算無限部分群の探索を主題とした. ここで剛性とは, 群が「特定の空間への「良い」作用を全く持たない」という性質を言う. このような性質の代表的なものとして, Serre の性質 FH と呼ばれるものがある. ある群が性質 FH を持つとは, 任意の実ヒルベルト空間への任意の等長作用が大域的固定点を持つことである. この定義は, 実ヒルベルト空間への「良い」作用, 例えば自由な作用や固有な作用が存在しないことを意味している. 性質 FH は非常に強い性質であり, 群の様々な性質を導く. 次の問いは, $\text{Homeo}^+(S^1)$ の部分群構造についての古典的な未解決問題である:

問 1: $\text{Homeo}^+(S^1)$ の有限生成部分群であって, 性質 FH を持つものはあるか.

性質 FH は非常に強いので, この性質を持つ群の例を作ることは難しい. そのため, 性質 FH を弱めた剛性性質も複数考えられている. 例えば, 群が性質 FA を持つとは, 任意の単体的木への任意の等長作用が大域的固定点を持つことである. 性質 FA の k 次元版である性質 FW_k , 無限次元版である性質 FW なども研究されている. これらの性質は全て性質 FH より従い, 強弱の関係は

性質 FH 性質 FW 性質 FW_n 性質 FA

のようになっている.

問 1 を解決するため, $\text{Homeo}^+(S^1)$ の部分群のうち, リング群と呼ばれる群に注目した. リング群は $\text{Homeo}^+(S^1)$ の部分群であって, ある有限生成系 (f_1, \dots, f_n) の台

$(\text{supp}(f_1), \text{supp}(f_2), \dots, \text{supp}(f_n))$

が開区間の「リング」を成し, なおかつ隣り合った生成元 f_i と f_{i+1} が Thompson 群 F と同型な群を生成するものをリング群と呼ぶ. リング群は, Kim-Koberda-Lodha による直線の自己同相のなす有限生成群「チェイン群」の単位円版として定義されるが, その一般的な性質については調べられていない. リング群は, Richard Thompson 群 T の一般化とみなすこともできる.

一般に性質 FH, 性質 FW, 性質 FW_n , 性質 FA などを持つ群の具体例を構成することは難しいが, T はその数少ない例の一つである. 実際, T は任意の次元 k について性質 FW_k を持つことが知られている. このような強い剛性を持つ群の一般化として, リング群に注目した.

2. 研究の目的

強い剛性を持つリング群に着目し, 性質 FH を持つ $\text{Homeo}^+(S^1)$ の有限生成部分群を探索する. 強い剛性を持つリング群の抽出と特徴づけを行う. 特徴づけが得られれば, それを応用することで, 性質 FH を持つリング群の探索・構成を行う.

3. 研究の方法

リング群を研究するにあたって, そのいくつかの具体例から研究を始めた. まず, よく知られた群である Higman-Thompson 群 T_n がリング群であることを示した. この群は T の一般化 (n 分岐版) として知られている. 次に, T_n の剛性に関して研究をおこなった.

4. 研究成果

性質 FH を持つ群の構成には至らなかったが, リング群の概念に注目したことで, 有限次元 $\text{CAT}(0)$ 空間への semi-simple な群作用の固定点性質を持つ群の具体例が無数個得られた. 具体的には次のようなことが示された. 「 m を 6 以上の整数とする. m' を 2 以上 $m-4$ 以下の整数とする. m 元生成リング群 G が, m' 元生成チェイン部分群で minimal なものを持つとする. H を G の交換子部分群の有限生成部分群とする. G が有限次元 $\text{CAT}(0)$ 空間に semi-simple な群作用を持つならば, H はその作用に関して大域的固定点を持つ.」ここで minimal とは, 群のその台への自然な作用に関して, 任意の軌道が稠密であることを言う. minimal なチェイン部分群の存在に関する仮定は, 証明の技術的な困難を回避するためのものであり, 今後の研究で外す (または弱められる) ことを期待している.

応用として, Higman-Thompson 群 T_n が任意の n に関してこのような性質を持つことを示すことができた. k 次元 $\text{CAT}(0)$ 空間への semi-simple な群作用の固定点性質を, semi-simple 作用に対する性質 FA_k と呼ぶ. 性質 FA_k は, 群表現などとの関連から, Farb らによって研究されている. 性質 FA_k は性質 FW_k に比べてより強い性質である. Thompson 群 T が任意の k について性質 FA_k を持つことは知られていたが, T_n が性質 FA_k や性質 FW_k を持つかは明らかでなかった. 本研究では, まず T_n が ring 群の具体例であることを示し, その次に T_n の剛性について示し, それを元に一般のリング群について扱う予定であったが, 当初の想定に反して, T_n の剛性に関する研究

は T の場合と比べて技術的に困難であり、一般のリング群に関する結果の系として T_n についての結果が得られることになった。

この過程で、Higman-Thompson 群の研究を進展させられると思われる、いくつかの知見が得られた。まず、 T_n の新たな有限生成系を構成することができた。この生成系によって T_n をリング群とみなせるが、それはすなわち、 T_n の部分群であって Richard Thompson 群 F に同型なものが具体的に得られることを意味する。また、この有限生成系は、 T_n の自己相似性を反映する形でいくらでも元の個数を大きく取り直すことができる。そのための具体的な手順についても結果が得られた。すなわち、 F に同型な部分群を、必要なだけ多く具体的に構成することができる。とわかった。 T_n に関して研究を行う際、対応する（すなわち F の一般化であり、 T_n の単位区間版である）Higman-Thompson 群 F_n に議論が帰着することがしばしばある。 F_n は F に比べて部分群構造などの意味で扱いが複雑であるため、議論が困難になることが多い。 T_n の F と同型な部分群がたくさん得られることは、 F_n に帰着させていた議論を、生成系を取り替えることで F に帰着させることができる場合があることを意味する。固定点性質のように、 T_n の S^1 への作用に関する議論を行う際は、このような考え方が有効と考えられる。このように、 T_n を新しい生成系によってリング群とみなすことで、 T_n に対する証明の技術的な困難を回避できる可能性が広がった。次に、 T_n の固定点性質について明らかにすることができた。その他の Higman-Thompson 群である F_n と V_n については、既に性質 FA_k を持たない/持つことが知られていたが、唯一未解決であった T_n の場合について結果を得ることができた。

今後の展望として、リング群の一般的な性質に関する研究が挙げられる。一般的なリング群に注目した研究は今のところ本研究以外に行われていないが、今回の研究結果からは、リング群の中に強い剛性も持つ群が多数含まれる可能性が示唆された。トンプソン群以外の具体例の構成も含めて、リング群の研究への展開が期待される。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計2件（うち査読付論文 2件 / うち国際共著 0件 / うちオープンアクセス 1件）

1. 著者名 Motoko Kato, Shin-ichi Oguni	4. 巻 64
2. 論文標題 Acyindrical hyperbolicity of Artin-Tits groups associated to triangle-free graphs and cones over square-free bipartite graphs	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Glasgow Mathematical Journal	6. 最初と最後の頁 51 ~ 64
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1017/S0017089520000555	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Kato Motoko	4. 巻 22
2. 論文標題 On groups whose actions on finite-dimensional CAT(0) spaces have global fixed points	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Journal of Group Theory	6. 最初と最後の頁 1089 ~ 1099
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1515/jgth-2018-0116	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計10件（うち招待講演 9件 / うち国際学会 2件）

1. 発表者名 加藤本子
2. 発表標題 On acylindrical hyperbolicity of some Artin groups
3. 学会等名 2020年度日本数学会秋季総合分科会
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 加藤本子
2. 発表標題 On acylindrical hyperbolicity of some Artin groups
3. 学会等名 Quantum Math, Singularities and Applications (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 加藤本子
2. 発表標題 On ring groups of homeomorphisms of the circle
3. 学会等名 Thompson群とその周辺 (招待講演)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 加藤本子
2. 発表標題 On acylindrical hyperbolicity of some Artin groups
3. 学会等名 Flat Structure and Singularities (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 加藤本子
2. 発表標題 ある種のArtin 群の非シリンダー的双曲性について
3. 学会等名 松山TGSA セミナー (招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 加藤本子
2. 発表標題 Richard Thompson's groups and their actions on non-positively curved spaces
3. 学会等名 岡潔女性数学者セミナー (招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 加藤本子
2. 発表標題 有限次元距離空間への群作用の固定点性質
3. 学会等名 第66回トポロジーシンポジウム（招待講演）
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 加藤本子
2. 発表標題 非正曲率距離空間への群作用の固定点性質
3. 学会等名 名古屋大学幾何学セミナー（招待講演）
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 加藤本子
2. 発表標題 The Higman-Thompson groups and ring groups of homeomorphisms of the circle
3. 学会等名 大阪大学トポロジーセミナー（招待講演）
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 加藤本子
2. 発表標題 リチャード・トンプソンの群とその応用
3. 学会等名 暗号と及び情報セキュリティと数学の関連ワークショップ（招待講演）
4. 発表年 2022年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
--	---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------