

令和 6 年 6 月 12 日現在

機関番号：13701

研究種目：研究活動スタート支援

研究期間：2019～2023

課題番号：19K23408

研究課題名（和文）電気の影響を加味した流体の数学解析

研究課題名（英文）Mathematical analysis of fluids with electrical effects

研究代表者

梶原 直人（Kajiwara, Naoto）

岐阜大学・工学部・助教

研究者番号：40843131

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 2,200,000 円

研究成果の概要（和文）：本研究において、解析半群論や最大正則性理論の新たな結果を得ることができた。従来のテーマであった自由境界問題にポテンシャル論を用いるという手法には至らなかったが、別の手法で十分な知見を得ることができた。それは積分型Fourier multiplier定理であり、正則関数の理論を経由し、さまざまな境界条件の方程式を扱うことに成功した。具体的には、半空間Stokes方程式、二相流体の方程式（表面張力を含んでも良い）、層状領域における熱方程式である。他にも、準定常問題の最大正則性を示した。これらは今後の非線形問題の重要な位置に属すると考えている。

研究成果の学術的意義や社会的意義

一般に自然現象などを解析するには、微分方程式が有効であることが知られている。特に、解の挙動を見ることができれば、ある種の未来予知ができていものと考えられる。その中で、そもそも微分方程式は解を適切に持つのかということは数学的に示さなければならない問題である。本研究成果では、その主張に対する一つの答えを与えることができたと思われる。様々な境界の影響に対し、統一的な評価を与えることができた。従来の計算量を省略することができたり、より現実の数値モデルを考えることができたと思われる。数学解析を通じた現象の理解は社会的意義があるものと考えられる。

研究成果の概要（英文）：In this study, we were able to obtain new results of theories of analytic semigroup and maximal regularity. Although I couldn't use potential theory which was my original theme, I was able to gain enough knowledge. It was an integral Fourier multiplier theorem, and I succeeded to treat various boundary conditions. More precisely, the Stokes equations on the half space, two phase fluid problem (with and without surface tension), the heat equations on the layer domain. In addition, I showed maximal regularity for the quasi-steady problems. I believe that these are important positions of the future nonlinear problems.

研究分野：偏微分方程式論

キーワード：放物型発展方程式 最大正則性理論 解析半群理論 Stokes方程式

1. 研究開始当初の背景

本研究の背景として、物理実験結果を数学的にいかに再現できるかという壮大な目標を立てていた。ある液滴が別の液滴に浮いている状況を考えると、一般に表面張力の影響から、球状の形をとる。しかし、電場を作用させると、楕円状に変化をすることが知られていた。これらは二相流体の粘性比、誘電率比、導電率比などが関係して、楕円の形状のダイアグラムが求められていた。

数学研究としては、近年流体の自由境界問題の研究が盛んになってきていた。それは準線形問題に対するアプローチとして、最大正則性理論を用いた可解性が進んできたからであると言える。しかしその研究を実際に行うための解析では、多くの予備知識や計算を要する問題点があったと考えている。他にも、一般にマクロの世界を扱う電気流体力学(MHD)と呼ばれる分野に対する数学解析は研究がなされている一方、ミクロな世界を扱う、電気流体力学という分野に関し、数学解析が進んできていなかったと思われる。

これらの背景、及び微分方程式を研究する数学者の立場から、物理実験結果に数学的妥当性や何かしらの証明を与えてみたいと考えた。まず初めに考えられることは、自由境界問題としての非線形偏微分方程式の可解性を考えることであった。

2. 研究の目的

上記の研究開始当初の背景に基づき、より具体的な研究内容として、次が挙げられる。

- ・ 任意の初期値に対する時間局所適切性.
- ・ 定常解の近傍の初期値に対する時間大域適切性 及び その安定性.
- ・ 定常解が楕円体を記述できる事.
- ・ 定常解と二相流体の係数比の関係.

また、適切性、自由境界の解析を行うにあたり、他の二相の問題などに応用可能な、汎用性のある新たな証明法を提案することも本研究の目的であった。

3. 研究の方法

一般に自由境界問題の適切性を示す従来の手法として、最大正則性理論を用いた手法が知られていた。これは、自由境界の方程式を固定境界の問題へ変換し、その固定領域での方程式で可解性を述べる手法である。Navier-Stokes 方程式などの半線形方程式は変換後、準線形方程式となり、一般に解析半群などで可解性を導くことができない。しかし、最大正則性評価を用いて、ある種最高階まで摂動項とみなせれば上手くいくことがわかっていった。私はこの方法だけでなく、Layer ポテンシャルの解析手法を新たに構築することを目論んでいた。Layer ポテンシャルの手法では、領域上のラプラス方程式を解くだけでなく、境界上のジャンプ条件までも合わせて、境界上の積分を合成積で表現できることがわかっていった。これにより、流体の方程式と静電ポテンシャルを連立した方程式が、より簡単に解けるのではないかと考えて研究を考えていた。領域を固定領域に変換する手法では、変換後の解の形状がわかりにくいと考え、この新たな手法では、解の形状解析にも有効であると期待していた。

4. 研究成果

この研究で扱う方程式は、簡単のため、領域上の流体方程式を定常 Stokes 方程式としていた。非定常 Navier-Stokes 方程式を用いた方が、より正確なのであるが、焦点を境界のみの時間発展とした方が、より簡単になると考えたためである。私はまず初めに、自由境界問題の最大正則性理論を用いた解析や、それを固定領域にする半沢変換・Lagrange 変換を学んでいった。その中で、Stokes 方程式ではなく、楕円型方程式を内部に持ち、境界が時間発展する準定常問題という存在を知った。これに対し、私は最大正則性定理を示した。これは楕円型方程式に対する Agmon-Douglis-Nirenberg や、放物型方程式に対する Denk-Hieber-Prüss に相当する $L_p L_q$ 評価であり、電気流体の方程式の解析とは多少距離があるが、重要な意味のある結果を得たと考えられる。また、解の正則性という観点から、放物型方程式に対する higher regularity の結果も得ることができた。流体の方程式に関しても、最大正則性評価を示す別の手法を得ることができた。それは H^∞ 無限大理論を用いるもので、従来の R 有界な議論よりも簡潔に定理を示

すことができる。これを応用して、半空間における Dirichlet, Neumann, Robin の境界条件であって解析半群生成定理や最大正則性定理を示した。重要となったのは、積分型の Fourier multiplier 定理であり、他の方程式にも応用可能であることが期待される。それは電気の影響を加味した線形方程式であっても解表示を得られれば、すぐにこれらの評価を出せられる。この考え方を応用し、二相流体の方程式に対しても上記2つの評価を示した。この際、表面張力の影響を入れることも簡単になり、解のクラスとしても適切に分類することができた。層上領域では上端と下端で二つの境界条件が必要であるが、下端を Dirichlet, 上端を Neumann とした問題も扱った。上端には表面張力の影響を加味することもできる。そして、熱方程式においても層状領域で Robin-Robin 条件で定理を示すことができた。こうして、従来の手法とは異なる考え方により、線形理論を構築できたと考えている。本来の研究手法であった Layer ポテンシャルを用いるやり方とは全く異なることになったが、新たな知見を得ることができたと考えている。今回の結果においては、国内外で多くの研究会で講演を行っており、他の研究者へ知ってもらうようにも努めている。非線形問題や自由境界問題を考えるには、まずはやはり線形理論をいかに作っていくかということが大事であるので、今回の研究はその最初のステップとなったと思われる。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計6件（うち査読付論文 4件／うち国際共著 0件／うちオープンアクセス 4件）

1. 著者名 梶原直人	4. 巻 -
2. 論文標題 Maximal L_p - L_q regularity for the heat equation with various boundary conditions in the half space	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 RIMS講究録	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -

1. 著者名 梶原直人	4. 巻 -
2. 論文標題 R-bondedness for an integral operator in the half space and its application to the Stokes problems	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 RIMS講究録	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -

1. 著者名 Kajiware Naoto	4. 巻 27
2. 論文標題 HIGHER REGULARITY FOR PARABOLIC EQUATIONS BASED ON MAXIMAL L_p - L_q SPACES	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Advances in Differential Equations and Control Processes	6. 最初と最後の頁 55～71
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.17654/0974324322012	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Ken Furukawa, Naoto Kajiware	4. 巻 -
2. 論文標題 Maximal L_p - L_q regularity for the Quasi-Steady Elliptic Problems	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Journal of Evolution Equations	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s00028-020-00638-2	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Kajiwara Naoto	4. 巻 9
2. 論文標題 Solution formula for generalized two-phase Stokes equations and its applications to maximal regularity: Model problems	5. 発行年 2024年
3. 雑誌名 AIMS Mathematics	6. 最初と最後の頁 18186 ~ 18210
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.3934/math.2024888	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Kajiwara Naoto, Matsui Aiki	4. 巻 59
2. 論文標題 Maximal regularity for the heat equation with various boundary conditions in an infinite layer	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 SUT Journal of Mathematics	6. 最初と最後の頁 73 ~ 90
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.55937/sut/1698562820	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

〔学会発表〕 計17件 (うち招待講演 10件 / うち国際学会 3件)

1. 発表者名 梶原直人
2. 発表標題 Maximal regularity for the Stokes equations in the half space
3. 学会等名 名古屋微分方程式セミナー (招待講演)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 梶原直人
2. 発表標題 Maximal regularity for the Stokes equations with various boundary conditions
3. 学会等名 日本数学会2022年度秋季総合分科会
4. 発表年 2022年

1．発表者名 梶原直人
2．発表標題 半空間におけるStokes方程式の最大正則性
3．学会等名 第106回岐阜数理科学セミナー（招待講演）
4．発表年 2022年

1．発表者名 梶原直人
2．発表標題 Maximal regularity for the Stokes equations with various boundary conditions
3．学会等名 Innovation of the theory for evolution equations: developments via cross-disciplinary studies（招待講演）（国際学会）
4．発表年 2022年

1．発表者名 梶原直人
2．発表標題 Maximal regularity for the Stokes equations with various boundary conditions in the half space
3．学会等名 Mathematical Analysis of Viscous Incompressible Fluid（招待講演）（国際学会）
4．発表年 2022年

1．発表者名 梶原直人
2．発表標題 Maximal regularity for the Stokes equations with Dirichlet-Neumann boundary condition in an infinite layer
3．学会等名 第48回発展方程式研究会
4．発表年 2022年

1．発表者名 梶原直人
2．発表標題 Maximal L_p - L_q regularity for the Stokes equations with various boundary conditions
3．学会等名 若手による流体力学の基礎方程式研究集会（招待講演）
4．発表年 2023年

1．発表者名 梶原直人
2．発表標題 Resolvent estimate for the heat equation in an infinite layer with various boundary conditions
3．学会等名 東京理科大学理工学部数学科談話会（招待講演）
4．発表年 2023年

1．発表者名 Naoto Kajiwara
2．発表標題 Maximal regularity for the Stokes equations with various boundary conditions
3．学会等名 第47回発展方程式研究会
4．発表年 2021年

1．発表者名 Naoto Kajiwara
2．発表標題 Time periodic solutions to the bidomain equations
3．学会等名 パターンダイナミクスに関連するモデリングと数理解析（招待講演）（国際学会）
4．発表年 2021年

1．発表者名 梶原直人
2．発表標題 Higher regularity for parabolic equations based on maximal L_p - L_q spaces
3．学会等名 第46回発展方程式研究会
4．発表年 2020年

1．発表者名 梶原直人
2．発表標題 Maximal L_p - L_q regularity for quasi-steady problems
3．学会等名 第45回発展方程式研究会
4．発表年 2019年

1．発表者名 古川賢
2．発表標題 動的境界条件付き高階楕円型方程式の可解性について
3．学会等名 日本数学会2020年度年会
4．発表年 2020年

1．発表者名 梶原直人
2．発表標題 Resolvent estimate for the heat equation in an infinite layer with various boundary conditions
3．学会等名 大阪大学 微分方程式セミナー 2023年6月（招待講演）
4．発表年 2023年

1．発表者名 梶原直人
2．発表標題 Resolvent estimate for the heat equation in an infinite layer with various boundary conditions
3．学会等名 北見工業大学における微分方程式セミナー
4．発表年 2023年

1．発表者名 梶原直人
2．発表標題 Maximal regularity for the Stokes equations with various boundary conditions
3．学会等名 新潟駅前 応用解析研究会（招待講演）
4．発表年 2024年

1．発表者名 梶原直人
2．発表標題 Maximal regularity for the Stokes equations with various boundary conditions
3．学会等名 Workshop on Analysis in Kagurazaka 2024（招待講演）
4．発表年 2024年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

research map https://researchmap.jp/kajiwaranaoto

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
--	---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計2件

国際研究集会 Studies in Analysis and Related topics at Noda	開催年 2020年～2020年
国際研究集会 PDE real analysis seminar	開催年 2020年～2020年

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------