

令和 4 年 6 月 10 日現在

機関番号：11301

研究種目：研究活動スタート支援

研究期間：2019～2021

課題番号：19K23418

研究課題名（和文）最適制御理論が横磁場スピングラス模型を解く

研究課題名（英文）Optimal control theory solves spin glass models with transverse field

研究代表者

奥山 真佳（Okuyama, Manaka）

東北大学・情報科学研究科・助教

研究者番号：60844321

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 2,200,000円

研究成果の概要（和文）：本研究では解析的に厳密な取り扱いが可能だと期待される新しい量子平均場スピングラス模型を確率微分方程式を用いて導入し、解析的な研究をおこなった。レプリカ法を用いてレプリカ対称解を構成し、それが確率微分方程式に対するApproximate Message Passing アルゴリズムの結果と一致することを確認した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

量子アニーリングを用いてスピングラス模型の基底状態を効率良く求めるためには、量子揺らぎがスピングラス模型の解構造に与える影響を理解することが不可欠である。しかし、スピングラス模型の平均場模型であるSherrington-Kirkpatrick(SK)模型に横磁場を印加した、横磁場SK模型においては静的近似が低温で破綻し、厳密解を得ることが困難なため、未だにその性質は十分には理解されていない。本研究の結果は、解析的に厳密な取り扱いが可能だと期待される模型を提案することにより、量子揺らぎが平均場スピングラス模型に与える影響を厳密に議論する際の出発点となることが期待される。

研究成果の概要（英文）：In this study, a new quantum mean-field spin glass model, which is expected to have an analytically rigorous treatment, is introduced using stochastic differential equations and studied analytically. We construct a replica symmetric solution using the replica method and confirm that it is consistent with the results of the Approximate Message Passing algorithm for stochastic differential equations.

研究分野：統計物理

キーワード：スピングラス 最適制御 確率微分方程式 拡張量子SK模型 横磁場SK模型 レプリカ法

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属します。

1. 研究開始当初の背景

量子アニーリングを用いてスピングラス模型の基底状態を効率良く求めるためには、量子揺らぎがスピングラス模型の解構造に与える影響を理解することが不可欠である。横磁場 Curie-Weiss 模型や有限パターンの Hopfield 模型などの比較的単純な平均場量子スピン系では静的近似の厳密性が最適制御理論を用いて証明されており、その性質が任意の温度で十分に理解されている。一方で、スピングラス模型の平均場模型である Sherrington-Kirkpatrick(SK)模型に横磁場を印加した、横磁場 SK 模型においては静的近似が低温で破綻し、厳密解を得ることが困難なため、未だにその性質は十分に理解されていない。

2. 研究の目的

この研究計画の目標は量子揺らぎが平均場スピングラス模型に与える影響を理解することであるが、横磁場 SK 模型の厳密解を得ることは現状では困難を極める。そこで、本研究では量子揺らぎを加えても厳密解を得ることが可能だと期待される新しい平均場スピングラス模型を導入することにより、量子揺らぎが平均場スピングラス模型に与える影響を理解する。

3. 研究の方法

横磁場 Curie-Weiss 模型に対して最適制御理論による解析が可能だったのは、鈴木トロッター変換をした際に、虚時間方向に最近接相互作用しか存在しなかったことに起因する。残念ながら、横磁場 SK 模型に対してレプリカ法を適用すると、虚時間方向に長距離の相互作用が生じるため、最適制御理論による解析は通用しない。

そこで、我々は虚時間方向に短距離の相互作用しか生じないような、新しい量子平均場スピングラス模型を導入した。具体的には、SK 模型の分配関数が確率微分方程式による時間発展演算子と等価であることに着目し、確率微分方程式に非可換な項を導入することにより、量子効果を取り入れた「拡張量子 SK 模型」を扱う。この模型は鈴木トロッター変換を行うと、虚時間方向のランダムネスが独立なものとなっており、レプリカ法を適用しても、虚時間方向に長距離の相互作用が生じない模型となっている。したがって、確率的最適制御理論による取り扱いが可能であることが期待される模型となっている。また、虚時間方向に長距離の相関が存在しないため、横磁場 Curie-Weiss 模型と同じく、静的近似の厳密性が強く示唆される模型となっている。本研究ではこの拡張量子 SK 模型の解析を集中的に行なった。

4. 研究成果

まずは平均場スピングラス模型を解析する標準的な手法であるレプリカ法を用いて拡張量子 SK 模型の解析を行った。この模型では量子効果を導入した影響で、通常の SK 模型の解析とは異なり、自由エネルギーに対応する量を解析するために複雑な固有値問題を解く必要が生じる。我々はレプリカ対称性を仮定することにより、固有値問題を解析し、自由エネルギーに対応する量の解析を得た。その結果、相転移点は通常の SK 模型と同じ値になることが判明した。一方で、通常の SK 模型では低温でレプリカ対称性が破綻することが知られている。そこで、1RSB を仮定した解析を拡張量子 SK 模型に対しても試みたが、複雑な固有値問題の困難性のため、1RSB を仮定した自由エネルギーの解析解を得ることは至っていない。これは今後の非常に重要な課題である。

次に、レプリカ法の解析結果の正当性を確かめるために、Belief Propagation と中心極限定理を組み合わせた手法である、Approximate Message Passing(AMP)アルゴリズムを用いてレプリカ法の結果を再現することを試みた。通常の SK 模型においては、Approximate Message Passing アルゴリズムを用いることにより、レプリカ法によるレプリカ対称解の結果を再現出来ることが知られている。一方で、今回扱っている模型は確率微分方程式に対応するので、確率微分方程式に対する Belief Propagation を確立すること自体が非自明な問題である。

そこで、我々はまず、確率微分方程式に対して形式的に Belief Propagation の対応物を構成することに成功した。この手法の計算能力自体に関する評価も興味深い問題であるが、本来の目的とは異なるため、詳細な評価はまだ行っていない。

次に、確率微分方程式に対する Belief Propagation と中心極限定理を用いることにより、確率微分方程式に対する AMP アルゴリズムの対応物を構成し、それを拡張量子 SK 模型に適用することにより、レプリカ対称解の結果を再現することに成功した。ここまでの結果に関して、現在論文投稿の準備中である。

ここまでの解析により、レプリカ対称解の結果が高温においては十分に信頼できる結果であることが分かった。さらに、我々は確率的最適制御理論を拡張量子 SK 模型に対して適用すること

により、数学的に厳密な議論を展開することを試みている。

今後の方針としては、やはり低温での厳密な解析、すなわち、レプリカ対称性が破れた場合の自由エネルギーの厳密解を得ることが非常に重要な問題である。具体的には、量子揺らぎを加えた際に、レプリカ対称相の存在領域が通常の SK 模型に比べてどのように変化していくのかを議論することにより、量子揺らぎが平均場スピングラス模型に与える影響を理解したい。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計1件（うち査読付論文 1件/うち国際共著 0件/うちオープンアクセス 1件）

1. 著者名 Manaka Okuyama, Masayuki Ohzeki	4. 巻 89
2. 論文標題 Inequality for Local Energy of Ising Model with Quenched Randomness and Its Application	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 J. Phys. Soc. Jpn.	6. 最初と最後の頁 064704-064704
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.7566/JPSJ.89.064704	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -

〔学会発表〕 計5件（うち招待講演 0件/うち国際学会 1件）

1. 発表者名 奥山真佳、大関真之
2. 発表標題 スピングラスモデルにおけるGriffiths第二不等式の弱い対応物の証明
3. 学会等名 日本物理学会2020年秋季大会
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 奥山真佳、大関真之
2. 発表標題 ねじれ詳細つり合い条件を満たす遷移行列に対するPeskunの定理の対応物について
3. 学会等名 日本物理学会第76回年次大会
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 奥山真佳人、大関真之
2. 発表標題 平均場量子スピン系に潜む古典非線形可積分系
3. 学会等名 日本物理学会2019年秋季大会
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Manaka Okuyama, Masayuki Ohzeki
2. 発表標題 An exact solution of the partition function for mean-field quantum spin systems without the static approximation
3. 学会等名 Adiabatic Quantum Computing Conference 2019 (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 奥山真佳人、大関真之
2. 発表標題 確率微分方程式を用いたSK模型の量子拡張
3. 学会等名 日本物理学会2019年秋季大会
4. 発表年 2021年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------