

自己評価報告書

平成23年 4月20日現在

機関番号：11301

研究種目：基盤研究(S)

研究期間：2008～2012

課題番号：20224013

研究課題名(和文) 非線形偏微分方程式の大域的適切性

研究課題名(英文) Theory of global well-posedness
on the nonlinear partial differential equations-

研究代表者

小藺 英雄 (KOZONO HIDEO)

東北大学・大学院理学研究科・教授

研究者番号：00195728

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・基礎解析

キーワード：関数方程式、非線形偏微分方程式

1. 研究計画の概要

非線形偏微分方程式を広範囲に渡って対象とし、解の存在、一意性、安定性といった“適切性”を研究する。定常方程式については、単に全空間だけでなく、種数のなど領域の位相不変量が方程式の可解性に与える影響をも対象とする。また障害物の形状に依存した解の非等方的な振る舞い、あるいは無限遠方における解の挙動の一意性への寄与を考察する。時間発展方程式については、局所適切性にとどまらず、時間大域的可解性を明らかにする。

2. 研究の進捗状況

(1) 流体力学の基礎方程式

- ① 3次元有界領域における L^r -Helmholtz-Weyle 分解
- ② 多重連結領域における定常 Navier-Stokes 方程式に関する Leray の問題についての考察
- ③ 一般領域における Stokes 作用素の最大正則性
- ④ Navier-Stokes 方程式の弱解の正則性

に関する新たな指標

- ⑤ 平行平板間の Couette 流の安定性
- ⑥ 非斉次境界値条件下における Navier-Stokes 方程式の大域的弱解の存在

(2) 実関数論的手法の開発

- ① 臨界 Sobolev 空間と平均振動有界空間における Gagliardo-Nirenberg 補間不等式
- ② 大域的な発散一回転の補題

(3) 反応拡散系方程式

- ① 弱型可積分空間と平均振動有界空間における放物型-放物型 Keller-Segel 方

程式系の時間大域解の存在と自己相似解への応用

- ② Keller-Siegel 方程式系の永井モデルに対する強解の時間漸近挙動
 - ③ 2次元 Keller-Segel 方程式系の解の局所存在定理と有限時間爆発
 - ④ 全質量有限なクラスにおける Keller-Segel 方程式系の後方自己相似解の非存在
 - ⑤ 熱方程式の解の最大点挙動
 - ⑥ 熱方程式の解の微分の減衰評価
 - ⑦ 多孔質媒質方程式の解の等高面の凸性の崩壊
 - ⑧ 符号変化するポテンシャル項付き熱方程式の解の大域的挙動
 - ⑨ 非線形境界条件における熱方程式の爆発問題
- (4) 波動・分散型方程式
- ① 熱および消散型非線形方程式に付随する線形化問題の評価式の確立
 - ② 高階双曲型非線形方程式の時間大域解の構成
 - ③ 零条件下における非線形波動方程式の長時間解の存在
 - ④ アインシュタイン方程式の解法についての注意
- (5) 乱流の統計理論と数理解析
- ① 回転乱流場における Large Eddy シミュレーション
 - ② フリンジ領域を用いたスペクトル法による乱流境界層の DNS
 - ③ 乱流混合層における統計解析

3. 現在までの達成度

- ① 当初の計画以上に進展している。

流体力学の基礎方程式に関しては、Leray によって提唱された多重連結領域における全流量ゼロの非斉次境界条件における定常 Navier-Stokes 方程式の可解性の問題について、かなり本質的な貢献をしていると評価できる。反応拡散方程式の一部と目されている Keller-Segel 方程式系に対しては、Navier-Stokes 方程式の解法に有効であった関数解析学および調和解析学の手法を適用し、局所的、大域的適切性の双方について既存の結果を大幅に進展させたと言ってよい。

一方、べき乗型の非線形項を有する反応拡散方程式の解の最大点の時間的变化や、爆発の現象の追跡に関して、世界最先端を走っていると自覚している。実際、研究分担者（石毛）による多孔質媒質方程式の解の等高面の凸性の崩壊の証明は、この分野の権威ある専門誌 *Math. Nachr.* の 2010 年 “Editor Choice” に選ばれた。

乱流の計算科学のおよび統計理論的研究に関しては、一様等方性乱流について、世界最大規模の DNS 実現の実績とそのデータ解析に基づいた最先端の知見を提供したといえよう。

4. 今後の研究の推進方策

(1) 研究集会の開催

- ① 第 4 回 MSJ-SI “Nonlinear Dynamics in Partial Differential Equations”
- ② SIAM Conference on Analysis of PDE
- ③ 若手発展方程式セミナー

(2) 研究班

- ① 非線形波動分散型方程式研究班
- ② 実関数論研究班
- ③ 乱流の統計理論と数理解析研究班

(3) 国際シンポジウムへの参加

(4) 研究支援者の雇用

5. 代表的な研究成果

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 4 3 件)

1. Blow-up set for a semilinear heat equation with small diffusion, Y. Fujishima and K. Ishige, *J. Differential Equations* **249**, 1056–1077, 2010, 査読あり
2. Parabolic quasi-concavity for solutions to parabolic problems in convex rings, K. Ishige and P. Salani, *Math. Nachr.* **283**, 1526–1548, 2010, 査読あり (雑誌 *Math. Nachr.* の Editor Choice を受賞)
3. Leray’s problem on the stationary Navier-Stokes equations with inhomogeneous boundary data, Kozono,

H., Yanagisawa, T., *Math. Z.* **262**, 27–39, 2009, 査読あり

4. Global DIV-CURL Lemma in bounded domains in \mathbf{R}^3 , Kozono, H., Yanagisawa, T., *Jour. Funct. Anal.* **256**, 847–3859, 2009, 査読あり
5. L^r -variational inequality for vector fields and the Helmholtz-Weyl decomposition in bounded domains, Kozono, H., Yanagisawa, T., *Indiana Univ. Math. J.* **58**, 1853–1920, 2009, 査読あり

[学会発表] (計 4 6 件)

1. Blow-up for a semilinear parabolic equation with large diffusion on \mathbf{R}^N , 石毛 和弘, 4th Euro-Japanese Workshop on Blow-up, Lorentz Center, Leiden, 2010年9月10日.
2. Leray’s inequality in 3D multi-connected domains, 小藪 英雄, 「Workshop on Mathematical Aspects of Hydrodynamics」, Mathematisches Forschungsinstitut Oberwolfach, Oberwolfach, Germany, 2009年7月19～25日.
3. Global Div-Curl Lemma in 3D bounded domains, 小藪 英雄, 「International Conference on Harmonic Analysis and Partial Differential Equations with Applications」 Beijing Normal University (Beijing, China) 2009年5月26～30日.
4. Leray’s inequality in 3D domains, 小藪 英雄, 「International Conference on Parabolic Equations 2009: On the occasion of Prof. Herbert Amann’s 70th birthday」, Banach Center (Bedlewo, Poland, 2009年5月11～15日.
5. Global Div-Curl Lemma in 3D bounded domains, 小藪 英雄, 「German-Japanese International Training Groups Waseda-Darmstadt University Mathematical Fluid Dynamics Launching Workshop」, 早稲田大学, 2009年4月14～16日.

[図書] (計 0 件)

[産業財産権]

- 出願状況 (計 0 件)
- 取得状況 (計 0 件)

[その他]

ホームページ

<http://www.math.tohoku.ac.jp/researchfields/kozono.html>