

自己評価報告書

平成 23 年 4 月 27 日現在

機関番号：13901

研究種目：基盤研究(A)

研究期間：2008 ~ 2012

課題番号：20244001

研究課題名(和文)

代数群、量子群およびヘッケ環の表現論

研究課題名(英文)

Representation theory of algebraic groups, quantum groups and Hecke algebras

研究代表者

庄司 俊明 (SHOJI Toshiaki)

名古屋大学・多元数理科学研究科・教授

研究者番号：40120191

研究分野：表現論

科研費の分科・細目：数学・代数学

キーワード：有限簡約群、複素鏡映群、指標層、グリーン関数、円分 q -シューア代数

1. 研究計画の概要

以下の互いに関連する事柄を目標とした。

(1) 有限簡約群の指標表の完成。

有限体上の簡約代数群の既約指標を決定し、その指標表を計算するアルゴリズムを完成させることを目標とする。有限簡約群の既約指標決定への統一的なアプローチを与えるルスティック予想は簡約群の中心が連結な場合に、研究代表者によって解決された。本研究では、一般の有限簡約群に対してルスティック予想の解決を目指す。ルスティック予想が解決されると既約指標の決定は、① この予想に含まれるある種のスカラーの決定と、② 一般グリーン関数の計算に含まれるべき単元の良い代表元を選ぶ問題の二つに帰着される。①、②の問題はルスティックの指標層の理論と密接に関係しており、その方向から解決を目指す。

(2) 複素鏡映群に付随したグリーン関数とマクドナルド関数。

C_n 型ワイル群の拡張として複素鏡映群 $G(r,1,n)$ が考えられる。1994年に $G(r,1,n)$ に付随するヘッケ環(有木-小池代数 $H_{\{n,r\}}$) が有木-小池により構成された。 $G(r,1,n)$ をワイル群に持つ代数群は存在しないが、ヘッケ環 $H_{\{n,r\}}$ はある意味で、仮想的な代数群の退化形と考えられる。斜交群 $Sp_{\{2n\}}$ の拡張として $G(r,1,n)$ をワイル群に持つ仮想的な群 $Sp_{\{rn\}}$ に対しても有限簡約群の諸性質が成立することが分かってきた。本研究では、この $Sp_{\{rn\}}$ に対する〈仮想的な〉指標表を構成することを目標とする。この問題は (1)

の問題の自然な拡張であって、(1) で提起された既約指標の分類とそれを計算するアルゴリズムを組み合わせ論的に再構成することを目指す。これに関連して研究代表者は、 $G(r,1,n)$ に付随したホール-リトルウッド関数やマクドナルド関数を導入し、それから得られるグリーン関数の性質を調べた。本研究では更にそれを発展させたい。

(3) 有木-小池代数に付随した円分 q -シューア代数の分解定数有木-小池代数 $H_{\{n,r\}}$ のパラメータが1のべき根の場合の表現、すなわちモジュラー表現は、A型ヘッケ環のモジュラー表現が GL_n のモジュラー表現と密接に関係することからも重要である。円分 q -シューア代数 $S_{\{n,r\}}$ はある種の $H_{\{n,r\}}$ 加群の準同型環として定義される。研究代表者は大学院生の和田と共に、 $S_{\{n,r\}}$ のある種の分解定数に関する積公式を証明し、また対応する高次レベルの q -フォック空間の標準基底についても同様の公式が成立することを示した。これは $H_{\{r,n\}}$ の分解定数が q -フォック空間の標準基底によって記述されるという予想を支持する結果である。本研究では、 $S_{\{r,n\}}$ の分解定数を有理チェレドニク代数との関連で調べることを目指す。

2. 研究の進捗状況

(1) については研究期間の後半に集中的に研究を行う予定である。

(2) については、予想外の進展が見られた。2007年、アチャール-ヘンダーソンにより、代表者の導入した $r=2$ の場合のコストカ関数(グリーン関数と同等の関数)がエンハンス

ト冪零錐 $N \times V$ に付随した交差コホモロジーによって幾何的に記述されることが示された (N は $GL(V)$ の冪零錐)。この結果は②の問題に対する幾何的枠組みを与えるものとして重要である。研究代表者は、彼らの結果を以下のように複素鏡映群の枠組みに拡張することに成功した。「一般の r に対して〈拡張された〉エンハnstト冪零錐 $N \times V^{\{r-1\}}$ に付随する交差コホモロジーは $G(r,1,n)$ に付随するコストカ関数と密接に関係する。」しかし、 r が 3 以上の場合、 r が 2 以下の場合と本質的に異なる現象が現れ、アチャール-ヘンダーソンの議論は適用できない。そこで、エンハnstト冪零錐の話を拡張して $GL(V) \times V^{\{r-1\}}$ 上の指標層の理論を構築し、エンハnstト冪零錐に付随するグリーン関数を定義した、さらに $GL(V)$ 上の指標層の理論にならって、指標層の特性関数に関する指標公式と直交関係を証明し、グリーン関数の直交関係式を導いた。そしてこの直交関係式が $G(r,1,n)$ に付随するコストカ関数の定義関係式と密接なつながりを持つことを示すことができた。

(3) についても興味ある進展が得られた。 $r=1$ の場合、 q -シューア代数 $S_{\{1,n\}}$ は A 型量子群の商として表され、ヴァラニョロ-ヴァセロは、それを利用して q -シューア代数の分解定数が q -フォック空間の標準基底から $q=1$ の特殊化によって記述されるという予想を解決した。 r が 2 以上の場合 $S_{\{r,n\}}$ が量子群の商として表されるかというのは、興味ある未解決問題である。研究協力者である和田は、通常の量子群のプラス部分とマイナス部分との張り合わせ方を変えて新しい代数を構成し、この代数の商として、 $S_{\{r,n\}}$ が表されることを示した。この代数は量子群の表現論と多くの共通点を持つことから、彼の結果は今後の応用に大きな期待が持てる。

一方、ブランダン-クレシェフはコバノフ-ラウダの結果を利用して、 A 型ヘッケ環 $H_{\{1,n\}}$ に次数付き環の構造を与え、 $H_{\{1,n\}}$ の分解定数が q -フォック空間の標準基底の $q=1$ への特殊化によって記述されるという有木の定理を q -分解定数の場合に拡張 (特殊化せず多項式として一致) した。連携研究者である有木は、この結果をさらに拡張し、 q -シューア代数 $S_{\{1,n\}}$ に次数付き環の構造を導入し、 $S_{\{1,n\}}$ の q -分解定数を定義し、それによってヴァラニョロ-ヴァセロの結果の q -変形版を証明した。これらの結果は非常に重要であり、円分 q -シューア代数への拡張も期待される。

3. 現在までの達成度

① 当初の計画以上に進展している。

(2) については、 $G(r,1,n)$ に付随するコストカ関数のエンハnstト冪零錐による幾何

的实现への道が開け、さらにはそれが、 $GL(V) \times V^{\{r-1\}}$ 上の指標層の理論にまで拡張できたことは、研究計画の作成時には、全く考えていなかった大きな成果である。また (3) についても、有木による $S_{\{1,n\}}$ の q -分解定数に関する定理と、和田による $S_{\{r,n\}}$ に対する「量子群もどき」の構成は今後の研究に影響を与える重要な結果である。以上より①と評価する。

4. 今後の研究の推進方策

(1) については、理論面の問題 (特にスピ群の場合) を解決し、リューベックの協力のもとに計算を実行する予定である。

(2) については、 $GL(V) \times V^{\{r-1\}}$ に付随した指標層の研究を進める。これについてはまだ解明されていない点も多く残っているので今後の研究が重要である。また、対称空間 $GL_{\{2n\}}/Sp_{\{2n\}}$ に対して (高次) エンハnstト冪零錐の類似を考え、そこに指標層の理論を導入したい。ここには自然に $G(r,1,n)$ に付随したマクドナルド関数が現れると思われる。

(3) については、現在の研究を継続する。

5. 代表的な研究成果

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 19 件)

- ① T. Shoji and K. Wada, Cyclotomic q -Schur algebras associated to the Ariki-Koike algebra, Rep. Theory, 14 (2010), 379-416. 査読有
- ② T. Shoji; Lusztig's conjecture for finite classical groups with even characteristic, Contemp. Math. 478, Amer. Math. Soc. Providence, 2009, 207-236. 査読有
- ③ T. Shoji and K. Wada, Product formulas for the cyclotomic q -Schur algebra and for the canonical bases of the Fock space. J. Algebra 321 (2009), 3527-3549. 査読有

[学会発表] (計 35 件)

- ① T. Shoji, Character sheaves associated to the enhanced nilpotent cone, International conference on Chevalley groups, reflection groups, braid groups, Les Houches (France), 2011年1月21日
- ② H. Miyachi, Hidden Hecke algebras and duality, International conference on Representations of Algebraic Groups and Quantum Groups, '10, Nagoya University (Japan), 2010年8月5日