

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成 25 年 5 月 16 日現在

機関番号：11301

研究種目：基盤研究（A）

研究期間：2008～2011

課題番号：20244002

研究課題名（和文） ランダム性を通して見る離散空間の幾何学

研究課題名（英文） Study of Geometry of a discrete space through randomness

研究代表者

小谷 元子 (KOTANI MOTOKO)

東北大学・大学院理学研究科・教授

研究者番号：50230024

研究成果の概要（和文）：幾何学と確率論の異なる分野の関わりを通じて、これまで扱えなかった特異性のある空間や離散的な空間の幾何学の新たな研究方法を開拓することを目的とし、ランダムウォークの量子版である量子ウォークや、非対称ランダムウォークの長時間挙動の幾何学的理解、ランダム群の固定点性質、Alexandrov 空間の Bishop-Gromov 型の不等式、ランダムグラフの収束性などに関する結果を得て、発表した。

研究成果の概要（英文）：Aim of this research proposal is to develop new methods to study geometric objects with singularities, or discrete spaces, which are not accessible by traditional differential geometrical technics. Our idea is to apply probability theory to those geometric objects. Some results are obtained and published from international journals.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2008 年度	7,000,000	2,100,000	9,100,000
2009 年度	7,900,000	2,370,000	10,270,000
2010 年度	7,400,000	2,220,000	9,620,000
2011 年度	7,400,000	2,220,000	9,620,000
総計	29,700,000	8,910,000	38,610,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・幾何学

キーワード：ランダムウォーク、ラプラシアン、距離測度空間

1. 研究開始当初の背景

近年、幾何学は微分幾何学の枠組みを超えて、特異性を持つ対象に対する興味が高まっている。

特に (1) ベキ零被覆の場合の大偏差と無限遠の接錐の関係 (2) 指数増大度をもつ有限生成群上のランダムウォークの長時間挙動とその幾何の関わり (3) 質量輸送理論を用いたエントロピーの幾何学的意味の解明と極限定理 (4) 非可換空間のラプラシアンの

スペクトルと幾何構造の関わり、について、離散幾何解析学の手法により新たな知見が得られることが期待されていた。

2. 研究の目的

本研究では、幾何学と確率論の異なる分野の関わりを通じて、これまで扱えなかった本研究は、確率論的手法を利用し、特異性のある空間や離散的な空間の幾何学の新たな研究方法を開拓することを目的としている。

3. 研究の方法

初年度である平成 20 年度に大規模な国際研究集会を行い、連携研究者全員の知識と理解の共通基盤を確立する。それに従い、21 年度には下記の具体的な問題に取り組む。22 年度にはそれまでの成果を再検討し、必要な指針修正を行うことで、23 年度への成果につなげる。4 年間の研究を通して、離散幾何学の新たな研究手法を開発し、国際誌への論文発表および国際研究集会で公表した。

4. 研究成果

平成 20 年に国際研究集会 probabilistic approach to geometry を開催し 200 名の参加者があった。これを Advanced Study of Pure Mathematics よりプロシーディングとして公表した。また、平成 21 年度にその発展である国際研究集会「ランダムメディア」を開催し、有益な情報収集ができた。これらで得た知見を基に下記のように成果をあげている。成果を広く発信するため、平成 23 年に国際研究集会「ランダムメディア II」を開催した。

(1) ベキ零被覆の場合の大偏差と無限遠の接錐の関係 (石渡氏との連携を中心とする) 連携研究者石渡聡が論文にまとめ公表した。

(2) 指数増大度をもつ有限生成群上のランダムウォークの長時間挙動とその幾何の関わり (新井, 井関, 納谷氏との連携を中心とする) 井関, 納谷が着実に成果をあげ、一連の論文にまとめ国際専門誌に発表した。

(3) 質量輸送理論を用いたエントロピーの幾何学的意味の解明と極限定理 (塩谷氏との分担研究及び、熊谷氏との連携を中心とする)、塩谷、熊谷が精力的に成果をあげ、複数の論文にまとめ、国際専門誌発表した他、国際会議等で数多くの招待講演を行い、注目を集めている。

(4) 非可換空間のラブラシアン固有値のスペクトルと幾何構造の関わり (楯氏との連携を中心とする)。は楯氏が深い内容の研究を行い、最近論文として国際専門誌に発表した。

それぞれにおいて分担者、連携研究者と密接な連絡を取りながら研究を進めた。

本研究では、幾何学と確率論の異なる分野の関わりを通じて、これまで扱えなかった特異性のある空間や離散的な空間の幾何学の新たな研究方法を開拓することを目的としているが、課題であるランダム性を通して離散空間の幾何学をみることで、ランダムウォークの量子版である量子ウォークや、非対称ラ

ンダムウォークの長時間挙動の幾何学的理解、ランダム群の固定点性質、Alexandrov 空間の Bishop-Gromov 型の不等式、ランダムグラフの収束性などに関して当初、予想していなかった方向への展開もあり今後の研究展開が見出された。

5. 主な発表論文等 (研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 35 件)

- ① T. Sunada and T. Tate, Asymptotic behavior of quantum walks on the line, J. Funct. Anal., 査読有、262 巻、2012 年, 2608-2645 (DOI:10.1016/j.jfa.2011.12.016)
- ② Takashi Shioya, Geometric analysis of Alexandrov spaces., Su Buqing memorial lectures 査読有、1 巻、2011 年、31-46
- ③ Takashi Shioya, Collapsing three-manifolds with a lower curvature bound, Tohoku Math. J., 査読有、63 巻、2011 年、471-487 (DOI:10.2748/tmj/1325886277)
- ④ Z.-Q. Chen, P. Kim and T. Kumagai, Global Heat Kernel Estimates for Symmetric Jump Processes, Trans. Amer. Math. Soc., 査読有、363 巻、2011 年、5021-5055 (DOI:10.1090/s0002-9947-2011-05408-5)
- ⑤ Shin Nayatani and Hiroyasu Izeki, An approach to superrigidity and fixed-point theorems via harmonic maps, Selected Papers on Analysis and Differential Equations, AMS Translations, 査読有、230 巻、2010 年、135-160
- ⑥ H. Izeki, A fixed-point property of finitely generated groups and an energy of equivariant maps, in Probabilistic Approach to Geometry, ASPM, 査読有、57 巻、2010 年、171-188
- ⑦ B. M. Hambly, T. Kumagai, Diffusion on the scaling limit of the critical percolation cluster in the diamond hierarchical lattice, Comm. Math. Phys., 査読有、2010 年、29-69

(DOI:10.1007/s00220-009-0981-3)

- ⑧ Z.-Q. Chen, P. Kim, T. Kumagai, On heat kernel estimates and parabolic Harnack inequality for jump process on metric measure spaces, *Acta Math. Sin. (Engl. ser.)*, 査読有、25巻、2009年、1067-1086 (DOI:10.1007/s10114-009-8576-7)
- ⑨ S. Ishiwata, A central limit theorem on modified graphs of nilpotent covering graphs, *Contemp. Math.*, 査読有、484巻、2009年、59-72 (DOI:10.1090/conm/484/09465)
- ⑩ Masahiro Itoh, Motoko Kotani, Hisashi Naito, Toshikazu Sunada, Yoshiyuki Kawazoe, and Tadafumi Adschiri, New metallic carbon crystal, *Phys. Rev. Lett.*, 査読有、102巻、2009年、055703-1~4 (DOI:10.1103/PhysRevLett.102.055703)
- ⑪ M. T. Barlow, R. F. Bass and T. Kumagai, Parabolic Harnack inequality and heat kernel estimates for random walks with long range jumps, *Math. Z.*, 査読有、261巻、2009年、297-320 (DOI:10.1007/s00209-008-0326-5)
- ⑫ M. T. Barlow, A. A. Tarai, T. Kumagai and G. Slade, Random walk on the incipient infinite cluster for oriented percolation in high dimensions, *Comm. Math. Phys.*, 査読有、278巻、2008年、(DOI:385-43110.1007/s00220-007-0410-4)

[学会発表] (計 93 件)

- ① S. Ishiwata, Heat kernel estimates on connected sums with non-compact joint, *Weekly Seminar*, 2012年03月26日、香港中文大学、香港
- ② T. Kumagai, Quenched invariance principle for random walks and random divergence forms in random media on Cones, *The expanding art of expansions*, 2012年02月14日、Eurandom、オランダ

- ③ T. Kumagai, Convergence of mixing times for sequences of random walks on finite graphs, 4th Cornell Conference on Analysis, Probability, and Mathematical Physics on Fractals, 2011年09月13日、Cornell University、アメリカ
- ④ T. Kumagai, Markov chain approximations to non-symmetric diffusions with bounded coefficients, 5th international conferences on Stochastic Analysis and its Applications, 2011年09月05日、Bonn、ドイツ
- ⑤ Takashi Shioya, Concentration, Ricci curvature, and eigenvalues of Laplacian, *Metric Geometry and Applications*, 2011年07月28日、The Purple Palace Nanjing, Nanjing、中国
- ⑥ Takashi Shioya, A topological splitting theorem for weighted Alexandrov spaces, *Geometry Seminar*, 2011年07月12日、Capital Normal University, Beijing、中国
- ⑦ S. Ishiwata, Manifolds with a bottleneck type heat kernel estimate, *Analysis and Geometry of Fractals and Metric Measure spaces*, 2010年3月20日、香港中文大学、中国
- ⑧ Motoko Kotani, *Geometry and Analysis, International Conference "Geometry and Analysis"*, 2009年12月21日、Paris 7、フランス
- ⑨ T. Kumagai, Heat kernel estimates for random walks on random media at criticality, *Above the critical dimension*, 2009年12月7日、Institut Henri Poincaré, Paris、フランス
- ⑩ Motoko Kotani, *Geometry of crystal lattices, Series of Lectures*, 2009年11月2日、北海道大学
- ⑪ Tatsuya Tate, An asymptotic Euler-Maclaurin formula for Delzant

- polytopes, Third International Conference on Geometry and Quantization, 2009年9月10日、University of Luxembourg、ルクセンブルク
- ⑫ Tatsuya Tate, Problems on asymptotic analysis over convex polytopes, International School on Geometry and Quantization, 2009年9月1日、3日、4日 University of Luxembourg、ルクセンブルク
- ⑬ T. Kumagai, Convergence of discrete Markov chains to jump processes and its application to random conductance models, Scaling Limits in Models of Statistical Mechanics, 2009年8月20日、Oberwolfach、ドイツ
- ⑭ Motoko Kotani, Mathematical challenge to a new phase of material sciences, Workshop “Boundaries”, 2009年7月1日、TU Graz、オーストリア
- ⑮ Motoko Kotani, A mathematical challenge to material sciences, Colloquium talk, 2009年3月18日、Technische Universitaet Graz、オーストリア
- ⑯ T. Shioya, Collapsing three-manifolds with a lower curvature bound, The 4th Geometry Conference for the Friendship of China and Japan, 2008年12月26日、南開大学(中国)
- ⑰ Motoko Kotani, Geometric aspect of random walk on a crystal lattice, Algebras, Operators and Noncommutative Geometry 2008年12月1日、Australian national University Australia、オーストラリア
- ⑱ Motoko Kotani, Geometric aspect of random walk on a crystal lattice, Perspectives in mathematical sciences, 2008年10月8日、東京大学
- ⑲ Tatsuya Tate, Bernstein measures on convex polytopes, The Mathematical Society of Japan, Seasonal Institute, 2008年7月29日、京都大学百周年時計台記念館 国際交流ホール
- ① Motoko Kotani, Masanori Hino and Takashi Kumagai, 日本数学会、「Probabilistic approach to geometry」、2011、514ページ
- ② M. Kotani, M. Hino, T. Kumagai, Mathematical Society of Japan, Advanced Studies in Pure Mathematics 57, Probabilistic Approach to Geometry, 2010年、514ページ
- ③ J. P. Bourguignon, M. Kotani, Y. Mada, N. Tose, Mathematical Society of Japan, Advanced Studies in Pure Mathematics 55, Noncommutativity and Singularities Proceedings of French-Japanese symposia held at IHÉS in 2006, 2009年、363ページ
6. 研究組織
- (1) 研究代表者
小谷 元子 (KOTANI MOTOKO)
東北大学・大学院理学研究科・教授
研究者番号：50230024
- (2) 研究分担者
塩谷 隆 (SHIOYA TAKASHI)
東北大学・大学院理学研究科・教授
研究者番号：90235507
- (3) 連携研究者
新井 仁之 (ARAI HITOSHI)
東京大学・大学院数理科学研究科・教授
研究者番号：10175953
- 熊谷 隆 (KUMAGAI TAKASHI)
京都大学・数理解析研究所・教授
研究者番号：90234509
- 井関 裕靖 (IZEKI HIROYASU)
慶應義塾大学・理工学部・教授
研究者番号：90244409
- 納谷 信 (NAYATANI SHIN)
名古屋大学・大学院多元数理科学研究科・教授
研究者番号：70222180
- 楯 辰哉 (TATE TATSUYA)
東北大学・大学院理学研究科・准教授
研究者番号：00317299

石渡 聡 (ISHIWATA SATOSHI)
山形大学・大学院理学部・准教授
研究者番号：70375393