

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成 25 年 5 月 17 日現在

機関番号：12601
研究種目：基盤研究(A)
研究期間：2008 ～ 2012
課題番号：20244003
研究課題名（和文）多様体の微分同相群の研究

研究課題名（英文） Groups of diffeomorphisms of manifolds

研究代表者 坪井 俊 (TSUBOI Takashi)
東京大学・大学院数理科学研究科・教授
研究者番号：40114566

研究成果の概要（和文）：空間の多様体構造の自己同型の群である微分同相群を様々な面から研究した。研究代表者は、実解析的微分同相群の単位元成分の完全性、微分同相群の単位元成分の一樣完全性、一樣単純性などについて、結果を得て出版した。研究分担者は、曲面の写像類群、横断的複素正則葉層、力学系における連結補題などについて、結果を得て出版した。また、毎年研究集会を開催し、共同研究と研究情報の交流を行った。

研究成果の概要（英文）：We studied the group of diffeomorphisms which is the automorphism group of the manifold structure. The principal investigator obtained results on the perfectness of the identity component of the group of real-analytic diffeomorphisms, the uniform perfectness and the uniform simplicity of the identity component of the group of smooth diffeomorphisms, and published them. The co-investigators obtained results on the mapping class group of surfaces, on the transversely holomorphic foliations, on connecting lemma in the theory of dynamical systems, and published them. Each year we organized meeting on the diffeomorphism groups for the collaboration and exchange the research ideas.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2008年度	6,600,000	1,980,000	8,580,000
2009年度	6,800,000	2,040,000	8,840,000
2010年度	6,800,000	2,040,000	8,840,000
2011年度	6,800,000	2,040,000	8,840,000
年度			
総計	27,000,000	8,100,000	35,100,000

研究分野：数学

科研費の分科・細目：数学・幾何学

キーワード：幾何学，トポロジー，多様体，微分同相群，分類空間，力学系，離散部分群，位相群，葉層構造

1. 研究開始当初の背景

多様体の微分同相群自体は多様体が定義されるとともに興味深い研究対象として研究されてきたが、特に 1970 年代からは葉層構造の研究との関連で、平坦接続をもつ

ファイバー束すなわち微分同相群への表現が研究対象になってきた。分類空間の位相については Mather-Thurston 理論として、不変量である特性類を定義については Gelfand-Fuks 理論として定式化された。また、平坦円周束に対する Milnor-Wood の不

等式は、Gromovの有界コホモロジー理論を生み出した。一方1970年代以降の力学系理論の発展の中で微分同相や1径数部分群の様々な力学系的な性質が定式化され、Palis, Mane達によってその安定性や分岐が研究された。これは微分同相群の部分群の力学系理論にも応用されることになった。これらの基礎的な研究の後、近年では、リー群の離散部分群の微分同相群への表現についてのZimmer, Ghysらの研究、微分同相群の離散部分群の幾何的理論としてのBass-Serreの理論やGromovの双曲群の理論、曲面の基本群の表現の理論、Mumford, 森田茂之, Millerの写像類群の特性類の理論、Tukia, Casson, Gabai等による円周の同相群の部分群がフックス群となるための力学系的な特徴づけ、松元重則, Ghys等によるフックス群となる部分群の剛性の研究、Zimmer, Hurder, Katok, 金井雅彦らによる微分同相群の部分群がアノソフ作用をするときの剛性の理論、坪井俊の微分同相群の分類空間の位相と正則性の関係の研究、Bestvina, 藤原耕二の群の有界コホモロジーの研究、Higman, Thompsonの有限表示無限単純群となる部分群の研究、皆川宏之の円周の区間線形同相の可換部分群の理論、リー群の離散部分群についてのSelbergや小林俊行の理論、林修平のホモクリニック分岐、軌道の変形の理論、微分同相群の部分群のエントロピーやエルゴード性の研究、円周の微分同相群への準同型の存在についてのGhysの理論など多くの研究がなされている。

最近の重要な研究としては、Polterovich, McDuff, Hofer, Eliashberg達のシンプレクティック微分同相群の研究、特に小野薫によるハミルトン微分同相群の研究、Kotschick, 森田茂之の曲面の面積を保つ微分同相群の不変量の研究、Calegariの3次元多様体の基本群から円周の基本群への表現の研究、平面の微分同相のオイラー類の研究、Navasの区間の可換な微分同相群の階数と正則性の研究、松元重則のパラメータ剛性の研究、Calegari, 藤原耕二、Kotschickの微分同相群における安定交換子長の研究、坪井俊の実解析的微分同相群の研究、足助太郎の複素解析的葉層構造の不変量の研究、河澄響矢の調和的マグナス展開と写像類群のMMM類の研究、浅岡正幸の3次元多様体の微分同相群のアフィン部分群の変形や共役の研究などが挙げられる。

研究代表者坪井俊、研究分担者林修平、河澄響矢、足助太郎、連携研究者浅岡正幸、大鹿健一、金井雅彦、中山裕道、野田健夫、藤原耕二、皆川宏之、森吉仁志、協力研究者として参画する森田茂之、松元重則は、

これまで述べたように（代表者、分担者、連携研究者は下線、協力研究者は下点線）微分同相群の研究を主体的に担ってきたが、さらに微分同相群を理解する研究を共同で集中的におこない、研究相互の関連を明らかにすることが重要であると考えられるようになった。

2. 研究の目的

微分同相群 $\text{Diff}(M)$ は、多様体 M の自己同型群であるが、この群の研究は様々な多様体上の構造の研究に応用される。実際、ある空間の基本群から微分同相群 $\text{Diff}(M)$ への表現（準同型）は平坦 M 束を与え、微分同相群の連結成分の群である写像類群への表現は多くの場合 M 束を与える。微分同相群の様々な不変量は（平坦） M 束の不変量を与え、底空間として考える空間の不変量を与える。多様体上の構造（シンプレクティック構造、接触構造、葉層構造、さらに強い幾何構造など）を保つ微分同相群を研究することは、多様体上の構造のより深い理解につながっている。局所微分同相の芽は位相重群を成し、そのホモロジー的、力学系的あるいは幾何的不変量の研究は、葉層構造の、同境類、ダイナミクス、横断構造の研究に結びついている。また、微分同相群のリー部分群のダイナミクスの記述、微分同相群の離散部分群の変形の記述は、多様体の大域的性質と多様体上の力学系、多様体上の構造の変形理論と表裏一体のものである。このように幾何学の多くの問題が、微分同相群への表現、微分同相群の不変量の研究に結びついている。

本研究では、これまでの研究成果を踏まえ、微分同相群および（連結成分の群である）写像類群への表現、これらの群の様々な部分群の配置、微分同相群や写像類群のホモロジー的、力学系的、幾何的不変量を研究し、様々な多様体上の構造を解明することを目的とする。そのために、様々な構造を保つ微分同相群の位相およびその分類空間の位相、微分同相群の離散部分群の変形、微分同相群のリー部分群の力学系理論的性質、微分同相群に付随する重群、写像類群の分類空間の性質、微分同相群の力学系的不変量と幾何的不変量に焦点を絞り、微分同相群および多様体の構造の不変量の発見、新しい研究手法を開発を期するとともに研究相互の関連を明らかにする。

3. 研究の方法

(1) 研究代表者および研究分担者、連携研究者、研究協力者が次の特に推進する研究をおこないつつ、他の分担者、連携研究者、研究協力者の研究との関連を探り、推進する研究

相互の交流を図る。これを研究代表者が総括する。

坪井 俊：種々の微分同相群の分類空間の位相の研究，様々な部分群の軌道構造の研究，接触微分同相群の代数的な研究，微分同相群の正則性の研究

林 修平：微分同相の固定点の安定性と不安定性の研究，1 径数部分群の閉軌道の生成と消滅の研究，双曲的部分群とホモクリニック分岐の研究

河澄響矢：曲面の写像類群のコサイクルの研究，超楕円の写像類群の研究，写像類群の複素解析的微分同相群への表現の研究，自由群の自己同型群の研究

足助太郎：複素解析的微分同相の 1 径数部分群の研究，共形変換群の研究，複素解析的微分同相芽のなす位相垂群とその分類空間の位相の研究

金井雅彦：微分同相群の部分群の剛性の研究，葉層の上の接続の微分幾何的研究，位相垂群構造の不変な熱方程式の研究

浅岡正幸：微分同相群のリー部分群の力学系的研究。微分同相群の部分群のアノソフ性の研究、微分同相群の部分群の共役性の研究

大鹿健一：3次元多様体の基本群の微分同相群への表現の研究，双曲多様体の端集合とその上への作用の研究， $PSL(2;C)$ の離散部分群の研究

中山裕道：1 径数部分群の **distality, expansiveness** の研究，3次元多様体の極小流の研究，多様体の微分同相が誘導する射影接束への作用の研究

野田健夫：多様体の多重葉層構造の研究、接触微分同相の研究、微分同相群の部分群のアノソフ性の研究

藤原耕二：幾何学的群論と微分同相群の関係の研究，距離つき樹木への群作用の研究，微分同相群、写像類群の有界コホモロジーの研究

皆川宏之：円周の区分線形同相群の研究，アノソフ・フローの横断構造の研究，擬アノソフ写像の研究

森吉仁志：葉層の上の関数環の研究，微分同相群の特性類の研究，微分同相群および葉層における普遍指数理論の研究

以下 2 名は特に研究期間の前半に研究に加わる研究協力者である。

松元重則：フローの横断構造の研究，変換群に付随した葉層コホモロジーの研究，曲面の面積を保つ同相群の研究

森田茂之：曲面の面積を保つ微分同相群の研究，曲面の写像類群の研究、写像類群、曲面の面積を保つ微分同相群の特性類の研究

(2) 本研究の主な対象である以下のものについて、共同研究プロジェクトを組織する。

(2-1) [様々な構造を保つ微分同相群] について、坪井、河澄、森吉のグループで共同研究を行う。

(2-2) [微分同相群の離散部分群の変形] について、大鹿、金井、野田、藤原のグループで共同研究を行う。

(2-3) [微分同相群のリー部分群の力学系理論的性質] について、林、浅岡、金井、中山、野田、皆川のグループで共同研究を行う。

(2-4) [微分同相群に付随する位相垂群、写像類群の分類空間の性質] について、坪井、河澄、足助、森吉のグループで共同研究を行う。

(2-5) [微分同相群の力学系的不変量と幾何的不変量] について、林、足助、浅岡、大鹿、中山、藤原、皆川のグループで共同研究を行う。

(3) 研究の中で現れてくる研究の相互の新しい関係に着目し、これを定式化し研究する。

(4) 多様体の微分同相群についての最新の研究成果を今回の研究に取り入れるために、世界の研究者との研究の交流を深める。そのための研究調査、研究打ち合わせのために、毎年 2 名程度国外に派遣する。

(5) 多様体の微分同相群についての研究集会を開催し、より広い研究の交流を促進する。

(6) 大学院生を主とする、若い研究者の育成のため、必要に応じて研究集会に参加できるようにし、また第一線の研究者との接触の機会をつくる。

(7) 研究交流をさらに円滑に行なうため、研究経過等を随時ウェブページに公表する。

(8) 本研究の実施について共同研究のため、外国人協力研究者を毎年 2 名程度招聘する。

(9) 本研究の研究成果は随時国内国外で発表する。

(10) 本研究を円滑に推進するために、研究支援員を雇用し、共同研究の準備作業、共同研究の記録の作成、ウェブページへの公表を行わせる。

4. 研究成果

多様体の微分同相群について研究を行った。[様々な構造を保つ微分同相群] については、坪井、河澄、森吉のグループで、[微分同相群の離散部分群の変形] については、大鹿、金井、野田、藤原のグループで、[微分同相群のリー部分群の力学系理論的性質] については、林、浅岡、金井、中山、野田、皆川のグループで、[微分同相群に付随する位相垂群、写像類群の分類空間の性質] については、坪井、河澄、足助、森吉のグループで、[微分同相群の力学系的不変量と幾何的不変量] については、林、足助、浅岡、大鹿、中山、藤原、皆川のグループで共同研究を行った。

この研究の成果として以下が得られた。

研究代表者坪井俊は、正則性があまり高くない接触微分同相の群の単位元成分の単純性を示した。良い円周作用を持つ実解析的多様体の実解析的微分同相群の単位元成分が完全であることを示した論文を出版した。また、微分同相群の単位元成分の一様完全性、多様体が連結な場合の一様単純性について、順に結果を拡張し、最終的には、次元が2, 4の場合を除く、多様体の微分同相群について、その一様完全性を示し、出版した。さらに、任意の次元の球面の向きを保つ同相群、任意の次元のメンガーコンパクト空間の同相群に対し、交換子幅が1となることを示した。これらは、2008年7月のサンチャゴデコンポステラでの葉層構造に関する国際会議の招待講演、2008年9月の日本数学会秋季総合分科会総合講演、2011年リヨン高等師範学校でのTodai Forumポスターとして発表した。

研究分担者河澄響矢は、写像類群の巡回部分群に関する結果、ブレイド群、曲面の写像類群のコホモロジー不変量についての論文を出版した。また、Goldman Lie 代数、Dehn twist の対数、シンプレクティック方向微分、高次 Johnson 準同型等についての研究成果について学会発表を行った。

研究分担者足助太郎は、複素葉層構造の力学系的な分解である Fatou-Julia 分解についての結果、横断的複素正則葉層の Bott 類の微分とシュワルツ微分の関係、横断的複素正則葉層の Godbillon-Vey 類についての結果を出版した。また、これらに関連する様々な問題について、学会発表した。

研究分担者林修平は、C2 級連結補題についての研究結果を出版した。また、C2 一般性の問題、周期点、周期軌道の生成についての研究成果を学会発表した。

途中から剛性の研究のために研究分担者として加わった金井雅彦は、複比と剛性について、学会発表を行った。

連携研究者との共同研究を行うとともに、国内外の研究者との交流を深めるために以下の研究集会を行った。

2008年10月に東京大学玉原国際セミナーハウスで研究集会「微分同相群と葉層構造」を行った。2009年10月に東京大学玉原国際セミナーハウスで研究集会「葉層構造と微分同相群」を行い、特に、葉層構造の空間についておよびヒグマン・トンプソン型の群の作用について研究した。2010年10月に東京大学玉原国際セミナーハウスで「葉層構造と微分同相群 2010 研究集会」を開催し、Yakov Eliashberg 氏を招聘し、最新の研究結果について討議した。研究交流のために 2011年3月に予定していた研究集会が東日本大震災のため中止され、これを研究費を繰り越して 2012年7月に開催し、研究成果の交流に努め

た。2011年10月に「多様体の平面場と微分同相群 2011 研究集会」を開催した。この研究集会に Gael Meigniez 氏を招聘し、最新の研究結果について討議した。

研究支援員高村正志とともに平面の面積要素を保つ形式的ベクトル場の GF コホモロジーの計算を継続し、新たなクラスがいくつか確認された。

この研究は 2012 年度に基盤研究 (S) 24224002「無限群と幾何学の新展開」に引き継がれた。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 18 件)

T. Yokoyama and T. Tsuboi, Codimension one minimal foliations and the fundamental groups of leaves, *Annales de l'Institut Fourier*, 査読有, 58, (2008), 723-731.

Takashi Tsuboi, On the simplicity of the group of contactomorphisms, *Advanced Studies in Pure Math.*, 査読有, 52, (2008), 491-504.

Takashi Tsuboi, On the uniform perfectness of diffeomorphism groups, *Advanced Studies in Pure Math.*, 査読有, 52, (2008), 505-524.

N. Kawazumi, Twisted Morita-Mumford classes on braid groups, *Geometry and Topology Monograph series*, 査読有, 13, (2008), 293-306.

T. Akita and N. Kawazumi, Integral Riemann-Roch formulae for cyclic subgroups of mapping class groups, *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.*, 査読有, 144, (2008), 411-421.

N. Kawazumi, On the stable cohomology algebra of extended mapping class groups for surfaces, *Advanced Studies in Pure Math.*, 査読有, 52, (2008), 383-400.

Takashi Tsuboi, Classifying spaces for groupoid structures, *Contemporary Mathematics*, 査読有, 498, (2009), 67-81.

Takashi Tsuboi, On the group of real analytic diffeomorphisms, *Annales Scientifiques de l'Ecole Normale Supérieure*, 査読有, 49, (2009), 601-651.

Takashi Tsuboi, On the uniform simplicity of diffeomorphism groups, Proceedings of the VIII International Colloquium, 査読有, (2009), 43-55.

Taro Asuke, On the Fatou-Julia decomposition of transversally holomorphic foliations of complex codimension one, Advanced Studies in Pure Mathematics, 査読有, 56, (2009), 39-47.

Taro Asuke, On the Fatou-Julia decomposition of transversally holomorphic foliations of complex codimension one, Proceedings of the VIII International Colloquium, 査読有, (2009), 65-74.

Taro Asuke, Infinitesimal derivative of the Bott class and the Schwarzian derivatives, Tohoku Math. J., 査読有, 61, (2009), 393-416.

S. Hayashi, Applications of Mane's C^2 Connecting Lemma, Proc. Amer. Math. Soc., 査読有, 138, (2010), 1371-1385.

Taro Asuke, A Fatou-Julia decomposition of transversally holomorphic Foliations, Ann. Inst. Fourier (Grenoble), 査読有, 60, (2010), 1057-1104.

Taro Asuke, Godbillon-Vey class of transversely holomorphic foliations, MSJ memoirs, 査読有, 24 (2010), 1-130.

Taro Asuke, On Fatou-Julia decompositions of pseudosemigroups, 数理解析研究所講究録, 査読無, 1699, (2010), 137-143.

Takashi Tsuboi, On the uniform perfectness of the groups of diffeomorphisms of even-dimensional manifolds, Commentarii Mathematici Helvetici, 査読有, 87, (2012), 141-185, DOI:10.4171/CMH/251.

T. Asuke, On Fatou-Julia decompositions of pseudosemigroups II, RIMS Kokyuroku, Research on Complex Dynamics and Related Fields, 査読無, 1762, (2011), 125-133.

[学会発表] (計 22 件)

坪井俊, 多様体の微分同相群, 日本数学会秋季総合分科会、総合講演, 2008年9月25

日, 東京工業大学.

Takashi TSUBOI, On the uniform perfectness of the group of diffeomorphisms, VIII International Colloquium on Differential Geometry, 2008年7月9日, Santiago de Compostela, Spain.

Taro ASUKE, On the Fatou-Julia decomposition of transversally holomorphic foliations of complex codimension one, VIII International Colloquium on Differential Geometry, 2008年7月11日, Santiago de Compostela, Spain.

坪井俊, $\{\text{Diff}\}^{\omega}(\mathbb{C}P^2)_0$, 「複素解析的ベクトル場・葉層構造とその周辺」研究集会, 2009年12月13日, 龍谷大学セミナーハウスともいき荘.

足助太郎, Embeddings of 2-tori transversal to linear vector fields on C^2 , 葉層構造と微分同相群研究集会, 2009年10月29日, 東京大学玉原国際セミナーハウス.

足助太郎, 葉層の二次特性類の無限小微分について, 「複素解析的ベクトル場・葉層構造とその周辺」研究集会, 2009年12月11日, 龍谷大学セミナーハウスともいき荘.

Takashi Tsuboi, On the uniform perfectness of the group of diffeomorphisms, Conference on Geometry and Topology of Foliations, 2010年7月13日, Centro de Recerca Matematica, Barcelona.

足助太郎, A Fatou-Julia decomposition for transversely holomorphic foliations, 第53回函数論シンポジウム, 2010年11月22日, 名城大学サテライト.

足助太郎, On Fatou-Julia decompositions, 2010年度複素力学系研究集会 -- 複素力学系とその周辺分野の研究 --, 2010年12月9日, 京都大学.

Nariya Kawazumi, The Goldman Lie algebra and Kontsevich's associative symplectic geometry, Seminar at QGM, 2010年9月28日, University of Aarhus.

Nariya Kawazumi, The logarithms of Dehn twists, Workshop 'Teichmueller Theory', 2010年12月3日, Mathematisches Forschungsinstitut Oberwolfach.

河澄響矢, The Chas-Sullivan conjecture for a surface of infinite genus, 研究集会「トポロジーの現在と未来」, 2010年12月21日, 文部科学省共済組合箱根宿泊所.

Nariya Kawazumi, On the Turaev cobracket on the Lie algebra of symplectic derivations, Seminar at QGM, 2011年1月26日, University of Aarhus.

林修平, A C^2 generic trichotomy for diffeomorphisms, 力学系研究集会, 2011年1月, 東京工業大学.

Takashi Tsuboi, Homeomorphism groups of commutator width one, Geometry and Dynamics, Todai Forum, 2011年10月17日, Ecole Normale Supérieure de Lyon (France).

Masahiko Kanai, Cross ratio, its relatives and rigidity, Geometry and Dynamics, Todai Forum, 2011年10月17日, Ecole Normale Supérieure de Lyon (France).

Taro Asume, Infinitesimal deformations of foliations and Cartan connections, Geometry and Dynamics, Todai Forum, 2011年10月17日, Ecole Normale Supérieure de Lyon (France).

足助太郎, 剛的な複素二次特性類の非自明性と独立性について, 2011年度複素力学系研究集会, 2012年1月26日, 京都大学数理解析研究所.

河澄響矢, A geometric approach to the higher Johnson homomorphisms, 研究集会「離散群と双曲空間の解析と幾何」, 2011年12月13日, 京都大学数理解析研究所.

Shuhei Hayashi, A C^2 generic obstruction to hyperbolicity for diffeomorphisms with dominated splittings, Beyond Uniform Hyperbolicity 2011, 2011年6月8日, Marseille, France.

Shuhei Hayashi, On the C^1 -creation of good periodic orbits, Geometry and Dynamics, Todai Forum, 2011年10月18日, Ecole Normale Supérieure de Lyon (France).

Shuhei Hayashi, On the creation of observable periodic orbits for diffeomorphisms, RIMS研究集会「力学系とトポロジーのフロンティア」, 2011年11月24日, 京都大学.

〔図書〕(計1件)

坪井 俊, 東大出版会, 幾何学III 微分形式, 2008, 248 ページ.

〔産業財産権〕

○出願状況 (計0件)

名称:
発明者:
権利者:
種類:
番号:
出願年月日:
国内外の別:

○取得状況 (計0件)

名称:
発明者:
権利者:
種類:
番号:
取得年月日:
国内外の別:

〔その他〕

ホームページ等

6. 研究組織

(1) 研究代表者

坪井 俊 (TSUBOI TAKASHI)
東京大学・大学院数理科学研究科・教授
研究者番号: 40114566

(2) 研究分担者

足助太郎 (ASUKE TARO)
東京大学・大学院数理科学研究科・准教授
研究者番号: 30294515

河澄響矢 (KAWAZUMI NARIYA)
東京大学・大学院数理科学研究科・准教授
研究者番号: 30214646

林 修平 (HAYASHI SHUHEI)
東京大学・大学院数理科学研究科・准教授
研究者番号: 20247208

金井雅彦 (KANAI MASAHIKO)
東京大学・大学院数理科学研究科・教授
研究者番号: 70183035

(3) 連携研究者

浅岡正幸 (ASAOKA MASAYUKI)
京都大学・大学院理学研究科・准教授
研究者番号: 10314832

大鹿健一 (OHSHIKA KENICHI)
大阪大学・大学院理学研究科・教授
研究者番号：70183225

中山裕道 (NAKAYAMA HIROMICHI)
青山学院大学・理工学部・教授
研究者番号：30227970

野田健夫 (NODA TAKEO)
東邦大学・理学部大阪大学・准教授
研究者番号：90431618

藤原耕二 (FUJIWARA KOJI)
東北大学・大学院情報科学研究科・教授
研究者番号：60229078

皆川宏之 (MINAKAWA HIROYUKI)
山形大学・地域教育文化学部・准教授
研究者番号：30241300

森吉仁志 (MORIYOSHI HITOSHI)
慶應義塾大学・理工学部・准教授
研究者番号：00239708