

機関番号：10101

研究種目：基盤研究 (B)

研究期間：2008～2010

課題番号：20340001

研究課題名 (和文) アーベル多様体のモジュライ空間の整数環上の大域的研究

研究課題名 (英文) A global study of the moduli spaces  
of abelian varieties over the ring of integers

研究代表者

中村 郁 (NAKAMURA IKU)

北海道大学・大学院理学研究院・教授

研究者番号：50022687

研究成果の概要 (和文)：アーベル多様体のモジュライの研究で以下の成果があった：

定理：1999 年に構成したモジュライ空間のコンパクト化  $SQ_{g,K}$  と異なるもう一つの自然なコンパクト化  $SQ_{g,K}^{toric}$  が (粗モジュライ) 代数空間として構成できる。コンパクト化  $SQ_{g,K}^{toric}$  から  $SQ_{g,K}$  への自然な射が存在し、両者の正規化の同型を引き起こす。

また、2 次元マッケイ対応に関して、精密化がほぼ完成し、拡大ディンキン図形を含めた説明ができるようになった。

研究成果の概要 (英文)：We proved the following in the theory of moduli of abelian varieties:

Theorem: There is another canonical compactification  $SQ_{g,K}^{toric}$  of the moduli of abelian varieties different from  $SQ_{g,K}$  constructed by us in 1999. Moreover there is a canonical bijective birational morphism from  $SQ_{g,K}^{toric}$  onto  $SQ_{g,K}$  which induces the isomorphism of their normalizations.

There was also a progress in sharpening the 2-dimensional McKay correspondence, which explains the connection with the extended Dynkin diagram.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2008年度	4,300,000	1,290,000	5,590,000
2009年度	4,300,000	1,290,000	5,590,000
2010年度	4,300,000	1,290,000	5,590,000
年度	0	0	0
年度	0	0	0
総計	12,900,000	3,870,000	16,770,000

研究分野：代数幾何

科研費の分科・細目：数学・代数学

キーワード：モジュライ，アーベル多様体，コンパクト化，安定性，マッケイ対応，単純特異点，既約表現，ディンキン図形

## 1. 研究開始当初の背景

研究代表者（以下、代表者）は、論文 “Stability of degenerate abelian varieties” (※1) で、レベル構造つきアーベル多様体のモジュライ空間の整数環上の (Fineモジュライとして) コンパクト化  $SQ_{g,K}$  を構成した。

レベル1の場合（つまり、レベル構造は自明の場合）はAlexeevの研究があり、レベル構造つきの場合は代表者の研究が、現在まで唯一のものである。

※1. I. Nakamura, “Stability of degenerate abelian varieties”, *Inv. Math.*, **136**, 659-715 (1999).

## 2. 研究の目的

本研究の目的は、主としてアーベル多様体のモジュライ空間の大域的な構造をより精密に明らかにすることである。

主要な問題と目標は以下の通り。

- (1) 悪い素点までコンパクト化を延長し、悪い素点での振る舞いを理解すること、
- (2) 標数ゼロのとき、Mumford のトロイダルコンパクト化との関係を明確にすること、
- (3) Siegel 保型形式を幾何学的にとらえること、換言すれば、モジュライ空間のコンパクト化を記述するために、アーベル多様体の自然な定義イデアルを書き下し、その係数に現れるテータ定数 (の類似物) として、主要なSiegel 保型形式をとらえ直すこと。(註. 論文 “Stability of degenerate abelian varieties” (上述「2. 研究の目的」の※1参照) は自然な定義イデアルを、本質的にひとつ指定しており、これを調べることでこの部分が解決できる。)
- (4) 2次元マッカイ対応 (論文 “Hilbert schemes and simple singularities” (※2)) に関連して、 $G\text{-Hilb}(C^2)$  の詳しい研究を進める。とりわけ、拡大ディンキン図形との関連を明らかにする。そのために自然なイデアルを構成し、それを表現論的に研究する。

※2. Y. Ito and I. Nakamura, “Hilbert schemes and simple singularities”, *New trends in algebraic geometry*, Proc. Euro. Math. Conf. 1996, London Math. Soc. Lecture Note Ser., Cambridge Univ. Press, **264**, 151-233 (1999).

## 3. 研究の方法

従来の代数幾何学的方法に加えて、新たに Heisenberg 群の表現論をとりいれて、より精密な結果を目指した。

## 4. 研究成果

「2. 研究の目的」(1)~(4)のうち、(4)は完全に解決、(1)は現在急速に進展中である。(2)、(3)は未完成、継続中であるが、(2)に関連して、論文 “Another canonical compactification of the moduli space of abelian varieties” (後述の[雑誌論文]⑥ Nakamura Iku) で次の定理を証明できた。

**定理:** 1999年に構成したモジュライ空間のコンパクト化  $SQ_{g,K}$  と異なるもう一つの自然なコンパクト化  $SQ_{g,K}^{toric}$  が (粗モジュライ) 代数空間として構成できる。

また、2つのコンパクト化の関係について、論文 “Another canonical compactification of the moduli space of abelian varieties” (後述の[雑誌論文]⑥ Nakamura Iku) により以下の定理が証明できた。

**定理:**  $SQ_{g,K}^{toric}$  から  $SQ_{g,K}$  への自然な射が存在する。これは内部  $A_{g,n}$  上では恒等写像であって、両者の正規化の同型を引き起こす。

(1)は現在急速に進展中である。(1)は元来困難な問題であって、解決には多くの課題を克服しなければならない。従って論文完成には未だ多くの時間を必要とする。1次元の場合に、現在 (Artin-Hasse exponential を用いた) 全く新しい方法でKatz-Mazurの結果を書き直すことができたようになった。この結果、今後は高次元もDieudonné加群を用いて相当程度完全な解決に向かっていると感じている。現在論文を執筆中であるが、関連するものを合わせるとすでに100ページを超える。

一方、2次元マッカイ対応について著しい進展があった。

**定理:**  $G$  を  $SL(2, C)$  の有限部分群、 $S=C^2/G$ 、 $X$  を  $G\text{-Hilb}(C^2)$  を  $G$ -ヒルベルト・スキームとする。このとき、 $X$  は  $S$  の極小特異点解消である。さらに、 $Z$  を  $G$ -ヒルベルト・スキームに付随する  $C^2 \times X$  の普遍的な部分スキーム、 $I_{univ}$  をそのイデアルとする。また、 $m$ 、 $nX$  をそれぞれ  $C^2$  の原点の極大イデアル、および

び,  $\mathbb{C}^2$  上の「3 個の  $G$ -不変式をもとに定義される」 $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2, X}$  のイデアルとし、さらに

$$\begin{aligned} \mathcal{V} &:= I_{\text{univ}}/mI_{\text{univ}} + n_X, \\ \mathcal{V}^\dagger &:= I_{\text{univ}}/(m + n_X)I_{\text{univ}}, \end{aligned}$$

と定義する. このとき,  $\mathcal{V}$  および  $\mathcal{V}^\dagger$  は  $G$  作用をもつ, 有限な  $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2, X}$  加群として, 以下のような既約分解を持つ:

$$\begin{aligned} \mathcal{V} &\simeq \bigoplus_{\rho \in \text{Irr} G} \rho \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_{E(\rho)}(-1), \\ \mathcal{V}^\dagger &\simeq \bigoplus_{\rho \in \text{Irr}_* G} \rho \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_{E(\rho)}(-1). \end{aligned}$$

$\mathcal{V}$  は 2 次元マッケイ対応の説明で重要な役割を果たした, 表現空間の普遍族とも言うべき自然な加群である. 上の定理は,  $\mathcal{V}$  および  $\mathcal{V}^\dagger$  上のような単純明快な分解を持つことを主張する. 自明な表現は,  $\rho_0$  を考 $\mathcal{V}^\dagger$  することによって, 初めて回復され, しかも  $E(\rho_0)(\rho_0 = \rho_{\text{natural}})$  はちょうど特異点の基本因子と一致する.

上の定理は, 完全に既約表現の同値類と拡大ディンキン図形の対応を与える.

この定理により, 拡大ディンキン図形を含めたマッケイ対応の説明ができるようになったので, この方向からのマッケイ対応の研究は一段落したと言ってよい.

なお, この形の定理は,  $K$ -理論や Langlands 対応でしばしば見られる. マッケイ対応も同じように定式化できることを示しており, 興味深い. ただし, この定理はまた  $E_8$  場合は証明されていない. この研究はに $\mathcal{V}$ する部分のみ, 論文 “McKay correspondence” (※3) に於いて発表された. 論文提出後の $\mathcal{V}^\dagger$ を得たので, これは新たに論文を準備中である.

※3 I. Nakamura, “McKay correspondence”, Groups and symmetries, CRM Proc. and Lec. Notes, **47**, 267–298 (2009).

## 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 13 件)

以下は研究期間中に出版された論文のリストである. 論文は, 発表年の新しいものから順に通し番号で配列するものとする.

- ① Katsurada, Hidenori; Kawamura, Hisaaki: “On Ikeda’s conjecture on the period of the Ikeda lift and its application”, 京都大学数理解析研究所報告集別冊『保型形式とその周期の構成と応用』, 巻号掲載頁数未定 (2011), 査読有 (受理、来年度発行).
- ② Weng, Lin: “Symmetries and the Riemann Hypothesis”, Advanced Studies in Pure Mathematics (Math. Soc. Japan), **58**, 173–223 (2010), 査読有.
- ③ Weng, Lin: “Stability and arithmetic”, Advanced Studies in Pure Mathematics (Math. Soc. Japan), **58**, 225–359 (2010), 査読有.
- ④ Katsurada, Hidenori; Kawamura, Hisaaki: “On the Andrianov type identity for power series attached to Jacobi forms and its application”, Acta Arithmetica, **145**, 233–265 (2010), 査読有.
- ⑤ Katsurada, Hidenori: “Rankin-Selberg method and periods of modular forms”, MSJ Memoirs **21**, 86–114 (2010), 査読有.
- ⑥ Nakamura, Iku: “Another canonical compactification of the moduli space of abelian varieties”, Algebraic and Arithmetic Structures of Moduli Spaces (Sapporo, 2007), Advanced Studies of Pure Mathematics (Math. Soc. Japan), **58**, 69–135 (2010), 査読有.
- ⑦ Nakamura, Iku: “McKay correspondence”, Groups and symmetries, CRM Proc. and Lec. Notes, **47**, 267–298 (2009), 査読有.
- ⑧ Suzuki, Masatoshi; Weng, Lin: “Zeta functions for  $G_2$  and their zeros”, Int. Math. Res. Not. IMRN, **2**, 241–290 (2009), 査読有.
- ⑨ Weng, Lin: “Zeta functions for  $\text{Sp}(2n)$ ”, J. Number Theory **129**, **3**, 567–579 (2009), 査読有, Appendix to Suzuki, Masatoshi: “The Riemann hypothesis for Weng’s zeta function of  $\text{Sp}(4)$  over  $\mathbb{Q}$ ”, J. Number Theory **129**, **3**, 551–567 (2009).
- ⑩ Katsurada, Hidenori; Kawamura, Hisaaki: “Ikeda’s conjecture on the period of the Ikeda lift”, 数理解析研究所講究録, **1659**, 68–81 (2009), 査読無.
- ⑪ Weng, Lin; Obitsu, Kunio; To, Wing-Keung: “The asymptotic behavior

of the Takhtajan-Zograf metric”, Comm. Math. Phys. 284, 1, 227-261 (2008), 査読有.

- ⑫ Weng, Lin; Zagier, Don: “Deligne products of line bundles over moduli spaces of curves”, Comm. Math. Phys. 281, 3, 793-803 (2008), 査読有.
- ⑬ Katsurada, Hidenori; Kawamura, Hisaaki: “A certain Dirichlet series of Rankin-Selberg type associated with the Ikeda lifting”, Journal of Number Theory 128, 7, 2025-2052 (2008), 査読有.

[学会発表] (計3件)

- ① 2011.1.20, Nakamura, Iku: “Extended Dynkin diagram in McKay correspondence”, Arithmetic and Algebraic Geometry 2011, 2011.1.18-22, University of Tokyo.
- ② 2009.6.8, Nakamura, Iku: “A canonical morphism from  $SQ_{g,K}^{toric}$  to  $SQ_{g,K}$ ”, Moduli and Discrete Groups, 2009.6.8-6.12, organized by Kondo and Mukai, Kyoto University.
- ③ 2009.1.19, Nakamura, Iku: “Two compactifications of moduli spaces of abelian varieties”, Arithmetic and algebraic geometry related to moduli spaces, 2009.1.19-23, organized by Katsura, Terasoma and Kondo, University of Tokyo.

[その他]

講演 (計5件)

- ① 2010.5.31-6.4, Nakamura, Iku: “Moduli of elliptic curves”, 集中講義, 埼玉大学理工学部.
- ② 2009.9.3, Nakamura, Iku: “McKay correspondence”, Seminar on Calabi-Yau, Queen’s University, Canada.
- ③ 2008.11.21, Nakamura, Iku: “A canonical morphism from  $SQ_{g,K}^{toric}$  to  $SQ_{g,K}$ ”, Kyoto University.
- ④ 2008.9.11 and 18, Nakamura, Iku: “Compactification of moduli of abelian varieties”, Seminar on Calabi-Yau, Queen’s University, Canada.
- ⑤ 2008.9.5, Nakamura, Iku: “Stability and compactification of moduli of

abelian varieties”, the Centre de recherches mathematiques, Montreal University.

ホームページのURL

<http://www.math.sci.hokudai.ac.jp/~nakamura/indexJ.html>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

中村 郁 (NAKAMURA IKU)

北海道大学・大学院理学研究科・教授

研究者番号: 50022687

(2) 研究分担者

なし

(3) 連携研究者

桂田 英典 (KATSURADA HIDENORI)

室蘭工業大学・大学院工学研究科・教授

研究者番号: 80133792

翁 林 (WENG LIN)

九州大学・大学院数理学研究院・教授

研究者番号: 60304002