様式C-19

科学研究費補助金研究成果報告書

平成　23年3月10日現在

機関番号：22604
研究種目：基盤研究（B）
研究期間：2008 ～ 2010
課題番号： 20340013
研究課題名（和文）リー変換群作用をもつ幾何的多様体の構造と種々の幾何剛性に関する研究

研究課題名（英文） Geometric structure on geometric manifolds which admit Lie group transformations and various Rigidity

研究代表者 神島芳宣（KAMISHIMA YOSHINOBU）
首都大学東京・大学院理工学研究科・教授
研究者番号（10125304）

研究成果の概要（和文）：
この研究期間中 次のことを調べた。
（1） 共形ローレンツ パラボリック多様体に関する幾何構造とトポロジーからのアプローチ
① ローレンツ多様体への小畠-Ferrand型の剛性定理の構築
② コンパクト共形平坦ローレンツ多様体の展開写像が $S^{n-1,1}$ の普遍被覆空間の上に全射でなければ、その像への被覆写像というKuiperの問題を因果的共形ベクトル場の存在のもとに肯定的に解いた。
（2） ミックス型非球形空間に対する可解ファイバー空間構造とその可微分剛性について調べた。その応用として コンパクト非球形等質多様体の剛性を証明した。

研究成果の概要（英文）：
We have examined the following projects.
(1) Approach from geometry and topology concerning conformally Fefferman-Lorentz manifolds.
① We proved the analogue of the Obata-Ferrand theorem to Lorentz manifolds.
② We proved the Kuiper's problem that if the developing map is not surjective on the universal cover of $S^{n-1,1}$, then it is a covering map onto its image under the existence of causal vector fields.
(2) We studied the infrasolv-fiber space structure and the smooth rigidity on the closed aspherical manifolds of the mixed type. As an application, we proved the smooth rigidity of compact aspherical homogeneous manifolds.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
２００８年度	1,800,000	540,000	2,340,000
２００９年度	1,500,000	450,000	1,950,000
２０１０年度	1,400,000	420,000	1,820,000
年度			
年度			
総　計	4,700,000	1,410,000	6,110,000

研究分野：幾何学とトポロジー
科研費の分科・細目：数学・幾何学
キーワード：幾何学, 微分幾何学, 微分トポロジー

１．研究開始当初の背景
具体的に共形構造、 コーシイ・リーマン構造、四元数 CR 構造など幾何構造を持つ多様体を眺めるとき、 その幾何不変量(曲率)が消滅するならば幾何構造の変形空間(Moduli)の中でその多様体はクリティカルになることを意味し、その幾何構造に関して標準平坦多様体が現れる。このように幾何構造の不変量が多様体の位相構造を特徴付けるような結果は微分幾何学・幾何的トポロジーの境界に属する分野の問題として興味深い。 一方 近年多様体の幾何構造は様々な進展を見せているが一般に幾何構造をもつ多様体の位相構造はまだ統一された結果は確立されていない。上の共形幾何、CR 幾何、四元数 CR 幾何は双曲空間の境界とその上に作用する実解析的変換群の幾何学と見なされ、これらの幾何的多様体に関する諸結果は２０年間のトポロジーにおける双曲幾何学の目覚しい発展とその手法に負うところが大きい。
しかし、**不定計量**をもつ多様体(擬リーマン多様体、例えばローレンツ多様体)に対しては幾何構造の一意化と多様体の位相構造の問題には統一的に研究されていない状況にあった。

２．研究の目的
今回の申請における目的は**擬計量(不定計量)をもつ多様体に対する幾何的不変量が消滅する際の幾何的多様体の一意化、位相構造の不変性、可微分剛性**を調べることにあった。実際、 次のことに取り組んだ。
(1) 擬リーマン多様体の共形平坦性と一意化
具体的に擬リーマン多様体として n 次元ローレンツ多様体 M を取り上げた。M は共形不変量としてのワイル共形曲率形式が消えるとき、共形平坦ローレンツ多様体と呼ばれる。共形平坦ローレンツモデル $S^{n-1,1}$ は球面 S^n とは異なり、直積 $S^n\times R$ を普遍被覆にもち、共形ローレンツ群 PO(n+1,2) がその推移的変換群である。M が共形平坦であるとき、幾何不変量としてローレンツモデルへの展開写像と基本群 π_1(M)から PO(n+1,2) への**ホロノミー準同型**が存在する。
① コンパクト共形平坦ローレンツ多様体 M の『展開写像が $S^n\times R$ の上に全射でなければその像への被覆写像』となっているかという問題を（20 年前に得られた共形平坦多様体の Kuiper の問題）を再訪して、その擬共形版としてのアプローチを試みる。もっとも困難な箇所は不連続領域を与えるホロノミー群の極限集合を**因果的測地線**を用いて幾何学的に定義できるかどうかにある。
この研究を継続することにより共形変換群 PO(n+1,1)の高次元クライン群とはまったく異質の共形ローレンツ変換群 PO(n+1,2)の離散群の変形空間の構造に初めて系統的に取り組む可能性を将来的に秘めている。
② 同時に幾何構造の立場から次の問題を考える。ローレンツ多様体の Fefferman 計量と幾何構造。擬凸 CR 多様体 X とその直積 $X\times S^1$ 上に S^1 が **光的** (lightlike)に作用するローレンツ計量を Fefferman は構成した。このローレンツ多様体の(計量の)解析的特徴づけは多変数解析の研究者により古くから行われているが幾何学的な関係－CR 多様体 X の Chern-Moser 曲率形式 S とローレンツ多様体 $X\times S^1$ の Weyl 共形曲率形式 W の関係についてはこれまで幾何学的には調べられていなかった。我々はこの Fefferman 型のローレンツ多様体をパラボリック構造の枠組みでとらえることにより平坦性の一意化と位相構造を駆使して『$X\times S^1$ が共形平坦であることと X が CR-平坦であることが同値である』ことを証明する。
③ 継続的に研究している分野として次のことに取り組くんだ。コンパクトローレンツ多様体に対する小畠-Ferrand の定理のアナロジー。
幾何構造を保つようなフロウをもつコンパクト擬リーマン多様体の剛体性を調べる。90 年代に **Gromov 剛体性予想**－非コンパクトな幾何的フロウ（幾何構造を保つ 1-径数群）が存在するとき、その幾何的多様体は標準的(平坦)モデル空間に実解析的幾何同型か－
が提起された。これをサポートするものとしては共形多様体に対する共形フロウの
小畠-Ferrand の剛体性定理（標準球面に同型)、また CR 多様体に対する CR-フロウの剛体性定理（奇数次元標準球面に同型)、 四元数フロウが存在する四元数ケーラー多様体の剛体性（標準四元数射影空間に同型）がその典型例である。我々は Gromov 剛体性予想が共形フロウをもつ閉ローレンツ多様体に対して、どのような時に成り立つかを調べた。
（２）ミックス型非球形空間の可微分剛性 (Smooth Rigidity of closed Aspherical manifolds.）この問題は別のタイプの剛性に関するものである。標準７次元トーラス T^7 とエキゾティック球面との連結和が T^7 に微分同相でない事実（Browder）があったため、1960 年の Borel 予想『基本群が同型であるようなコンパクト非球形空間はすべて同相か』は 同相の場合に限られていた。にもかかわらず、「微分同相」に関する Borel 予想はそれ自身幾何構造の立場から興味深い歴史がある。
幾何的剛性とは「二つのコンパクトな非球形幾何的多様体の基本群が同型ならば多様体として微分同相であるか」というものである。この問題は１９１１年の Bieberbach のコンパクトユークリッド空間形のアファイン

剛性、Malcev の冪零多様体の幾何的剛性、Mostow の可解多様体の幾何的剛性と続き、この方向では１９８０年代 Kamishima・Lee・Raymond による infra-冪零多様体の幾何的剛性、Baues による infra-可解多様体の幾何的剛性まで証明されている。もう一つのクラスはMostowによる有名な双曲多様体の等長剛性、Gromov-Margulis に象徴される実階数２以上の非正断面曲率をもつコンパクトリーマン局所対称空間の等長剛性である。これらは一方が可解リー群をモデル、他方は半単純リー群をモデルにもつ非球形幾何的多様体である。

我々の目的はミックス型非球形多様体の幾何的可微分剛性－**可微分ボレル予想**－に取り組むことである。ミックス型を混在している状態と解釈するとき、群の言葉で言うならば非球形多様体の基本群は可解群の双曲群による群拡大であり、ホモトピー空間的にはファイバーが可解多様体、底空間が非正曲率リーマン軌道体であるような特異ファイバー構造をもつ可微分多様体のことを意味する。

３．研究の方法

① n+1次元ローレンツ多様体Mの共形平坦性と一意化に関して、展開写像が $S^n\times R$ の中の像への被覆写像となっていることがいえるならば、単連結なMは不連続領域Ωを被覆し、またホロノミー群Γが離散のときMは共形平坦ローレンツ多様体Ω/Γを有限に被覆する。まずΛを離散群 $\Gamma<PO(n+1,2)$ の極限集合とするとき、$\Omega=S^n\times R-\Lambda$ である。
モデル空間 $S^{n+1,1}$ は擬双曲空間の境界として実現されている。双曲空間とは異なり測地線はユニークでない。このためΓ-軌道の境界点集合としては定義できない、しかし 因果的(Causal)測地線が代わりに出てくる。 これを使って極限集合Λが定義できないかどうか分担者たちと調べた。
② 我々はFefferman計量は局所的には問題ないが大域的には共形類の中で一意的に決まるものと最近確認できた。したがって山辺タイプのローレンツ版は意味を持つことになる。共形平坦ローレンツ構造に戻って、幾何学的に変換群を捉える際、共形ローレンツ群 $PO(2n+2,2)$ の中に複素双曲群 $G=U(n+1,1)/Z_2$ が部分群として入っていることに注目し、Fefferman-ローレンツ パラボリック多様体が共形平坦ならば、$(G,\ S^{2n+1,1})$ に一意化されることを半単純リー群を使って考える。さらにこのFefferman-ローレンツパラボリック構造はFefferman多様体の一般化になっていることを示したい。
そうするとローレンツ多様体 $X\times S^1$ の共形不変性は基礎となるCR多様体XのCR-不変性と同値であることが証明できる。

③ Gromovには数多くの予想があるが、 この剛体性予想はVague conjectureと呼ばれていて、非常に取り扱いが難しいものである。コンパクトコンタクト多様体、あるいはまたシンプレクティック多様体上の構造を保つフロウ(geometric flow)が閉軌道をもつかどうかという問題の時期に提起されたものである。我々のようにG-構造の立場から剛体性に取り組むのは一つの方法と思っている。
その方法はまず非コンパクト因果的共形フロウがあるとき、そのローレンツ多様体は共形平坦であることを示す。 第二段階はその非コンパクトフロウと可換な基本群を $PO(n,2)$ の中でコントロールできるかどうかということに帰着する。
コンパクトリーマン多様体に対する小畠－Ferrandの定理とは異なり、閉R-共形作用を持つだけでは標準共形平坦ローレンツ多様体 $S^{n-1,1}$ に共形でないものがあり、一般に成り立たないことはすでに知っている。
しかしコンパクト(2n+2)次元Fefferman-ローレンツ多様体 $M=S^1\times N$ に対してはそのパラボリック群を非コンパクト因果的フロウがコントロールできることに注目し、『光的(lightlike)な変換 S^1 を含む非コンパクト閉 $S^1\times R$ -群がMに共形的に作用しているならば、標準モデル $S^{2n+1,1}$ に共形微分同相である』ことを予想している。より一般に非コンパクト群作用と曲率の関係を調べて、コンパクトFefferman-ローレンツ パラボリック多様体について非コンパクト光的フロウ $S^1\times R$ の存在の元で成り立つかどうか考える。

(2) ミックス型非球形多様体の空間構造を調べる方法として 標準可解幾何型ファイバー空間を導入する。どのような多様体がそのミックス型非球形多様体(の例)になるのか、最初の試みとして 一般リー群 G とその閉部分群H による非球形等質空間G/Hを取り上げ、それがミックス型の例になることを示す。このことからG/Hの幾何的剛性を導くための必要十分条件を探し出す。

標準可解幾何型ファイバー空間の底空間とファイバーをいろいろ取りかえることにより、Injective Seifert ファイバー空間の従来の結果を導くとともに拡張していることを検証し、結果として我々が提唱する『ミックス型非球形多様体』は古典的Seifertファイバー構造を一般化していることを主張する。実際ファイバーがinfra-冪零多様体からinfra-可解多様体に拡張されることを示すことにより本質的にこれまでのファイバー束構造とは異なるファイバー空間構造を構築している。定空間における固有作用(W,Q)が幾何的剛性を持つならば 固有作用(X,H)も従う。離散群πと連結リー群Gに対し、等質空間 G/πがコンパクト非球形多様体とする。Diff(G)を G の微分同相写像がつくる**無**

限次元位相群とするとき、離散忠実表現の変形空間 R(π,G)は R(π,Diff(G))の中で 1 点である。（つまり、任意の離散・剰余コンパクト表現は Diff(G)の元を選んでひとつの標準表現に共役である。）われわれの要請により、群 H のラディカルはアファイン群 Aff(R)に含まれていることから、ラディカルの実代数的閉包 Hull(rad H)を考えることができる。 実際、群作用の無限性に対して写像空間がつくる加群を係数とするような群のコホモロジー代数の消滅性を示すことにより群作用の同型類の有限性を得るという無限次元空間のコントロールに対する新たな着眼点を見出す可能性に期待している。

４．研究成果

(1) Fefferman 計量をもつローレンツ多様体を一般化してパラボリック構造を持つローレンツ多様体を考えた。そのとき、そのローレンツ多様体が共形平坦のとき、CR 基礎多様体が平坦であるときまたそのときに限ることを示した。またコンパクト共形平坦 Fefferman-ローレンツ パラボリック多様体の展開写像を調べ、lightlike 等長変換群の存在のもとに展開写像が $\mathbf{S}^n\times\mathbf{R}$ の中の像への被覆写像となっていることを示した。

(2) 小畠-Ferrand の定理をローレンツ多様体の場合に考え、Fefferman-ローレンツ多様体の場合に肯定的に解いた。コンパクト (2n+2)次元 Fefferman-ローレンツ多様体 $\mathbf{S}^1\times N$が閉 非コンパクトlightlike共形フロウ $\mathbf{S}^1\times R$ を持つならば標準モデル $S^{2n+1,1}$ に共形微分同相であることを示した。

(3)ミックス型非球形多様体の微分剛性について研究した。ミックス型非球形多様体とはファイバーが可解多様体、底空間が可微分剛性を有する軌道体であるような特異ファイバー構造をもつ可微分多様体である。我々はファイバー空間構造を代数群の観点から調べ、結果として幾何的剛性を導くための必要十分条件を求めた。実際、群拡大を導く群同型写像が与えられたとき、その同型写像を誘導する底空間の同変微分同相写像が存在するならば、全空間の同変微分同相写像が存在することを示した。この応用として非球形等質空間 G/HとG'/H'の基本群が同型ならば微分同相であることを証明した。

５．主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計１１件）

(1)神島芳宣,
Nondegenerate
conformal,CR,Quaternionic CR structure on Manifolds,
Handbook of Pseudo-Riemannian Geometry and Supersymmetry, (ed. Vicente Cortes), Vol. 16}, 863-896 (2010).

(2)神島芳宣, Sorin Dragomir
Pseudoharmonic maps and vector fields on CR manifolds, Jour. Math. Soc. Japan, Vol. 62, 269-303 (2010).

(3)相馬輝彦, S. Kiriki
Coexistence of invariant sets with and without SRB measures in Henon family, Nonlinearity, Vol. 23, 2253-2269, (2010).

(4)Martin Guest, Differential equations aspects of quantum cohomology,
in: Geometric and Topological Methods for Quantum Field Theory, Cambridge Univ. Press, Vol. 501, 54-85, (2010).

(5)長谷川敬三, Small deformations and non-left-invariant complex structures on six-dimensional compact solvmanifolds, Differential Geom. Appl.,Vol.28, 220-227, (2010).

(6) 神島芳宣, Admi Nazra, Seifert fibred structure and rigidity on real Bott towers, Contemp. Math. of A.M.S. , Vol. 501, 103-122, (2009).

(7)神島芳宣, Mikiya Masuda, Cohomological Rigidity of real Bott manifolds, Algebraic Topology and Geometry, Vol. 9, 2479-2502, (2009).

(8)神島芳宣, Omolola Odebiyi, On the limits sets of spherical CR manifolds, Bulletin of Institute of Mathematics, Academia Sinica, New Series,Vol.4,189-217, (2009).

(9)長谷川敬三,
Complex and Kahler structures on compact homogeneous manifolds---their existence, classification and moduli problem,Adv. Stud. Pure Math., 56, Math. Soc. Japan, Tokyo,Vol.56, 151-167, (2009).

(10) 神島芳宣, Dmitri Alekseevsky,
Pseudo-conformal quaternionic
CR structure on (4n+3)-dimensional manifolds, Annali di Matematica Pura ed Applicata, Vol. 187, 487-529, (2008).

(11) 相馬輝彦, S. Kiriki,

Persistent antimonotonic bifurcations and strange attractors for cubic homoclinic tangencies, Nonlinearity, Vol. 21, 1105-1140, (2008).

(12) Martin Guest, From Quantum Cohomology to Integrable Systems, Oxford University Press, Vol. 501, 305 pp, (2008).

(13) 神谷茂保, J. Parker, Discrete subgroups of PU(2,1) with screw parabolic elements, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. Vol. 144, 443-455, (2008).

(14) 今井淳, Energy of knots and the infinitesimal cross ratio, Proceedings of the Conference Groups, Homotopy and Configuration Spaces, Geometry and Topology Monographs, Vol. 13, 421-445, (2008).

(15) 今井淳, The configuration space of planar spidery linkages, Topology Appl., Vol. 154, 502-526, (2007).

〔学会発表〕(計６件)

(1)講演
神島芳宣、Conformally flat Fefferman – Lorentz manifold and Obata and Ferrand Rigidity, 2010年12月, 研究集会「擬リーマン幾何学とその関連する話題」 お茶の水女子大学 東京.

(2)講演
神島芳宣、Conformally Lorentz parabolic structure and Fefferman-Lorentz metric, 2010年11月, Workshop in Parabolic geometry and related topics, Tambara Seminar House (玉原) 群馬県.

(3)講演
Conformally flat Fefferman-Lorentz manifolds, 2010年2月 Workshop in Flat conformal Lorentzian structures, Princeton University, Princeton, US. 神島芳宣

(4)講演
神島芳宣、Conformal flow on compact Lorentz manifolds and Obata-Ferrand's theorem and Fefferman metrics, 2008年11月, 第35回変換群シンポジウム, 岡山.

(4)講演
神島芳宣、Conformal flow on Lorentz manifolds, 2008年8月, 科学技術院(Korea Advanced Institute of Science and Technology), 研究集会, 大田(韓国).

(5)講演
神島芳宣、Seifert structures on real Bott towers、2008年5月, Conference on Discrete Groups and Geometric Structures, with Applications III, K.U.Leuven Campus, Kortrijk, Belgium.

６．研究組織

(1) 研究代表者
神島 芳宣 (KAMISHIMA YOSHINOBU)
首都大学東京・大学院理工学研究科・教授
研究者番号: 10125304

(2) 研究分担者
１. マーチンゲスト(MARTIN GUEST)
首都大学東京・大学院理工学研究科・教授
研究者番号: 10295470

２．相馬　輝彦　(SOMA TERUHIKO)
首都大学東京・大学院理工学研究科・教授
研究者番号：5015468

３．今井　淳 (IMAI JUN)
首都大学東京・大学院理工学研究科・准教授
研究者番号：70221132

４．神谷 茂保 (KAMIYA SHIGEYASU)
岡山理科大学・工学部・教授
研究者番号： 80122381

５．長谷川 敬三 (HASEGAWA KEIZO)
新潟大学・人文社会・教育系・教授
研究者番号： 70183225

(3) 連携研究者
1. 酒井高司　(SAKAI TAKASHI)
首都大学東京・大学院理工学研究科・助教
研究者番号：30381445
(一年のみ)