様式Ｃ－１９

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成２４年３月３１日現在

機関番号：３２６１２
研究種目：基盤研究（Ｂ）
研究期間：2008～2011
課題番号：２０３４００２３
研究課題名（和文）　禁止マイナーによって特徴づけされたグラフに関する研究

研究課題名（英文）　Research on graphs characterized by forbidden minors

研究代表者
太田 克弘（OTA KATSUHIRO）
慶應義塾大学・理工学部・教授
研究者番号：40213722

研究成果の概要（和文）：
与えられたグラフの部分グラフから，辺の縮約を繰り返して得られるグラフを，元のグラフのマイナーと呼ぶ．平面グラフなど重要なグラフの族はマイナーに関して閉じており，禁止マイナーによって特徴づけされる．これまでに知られていた平面グラフなどにおける閉路，全域木，因子に関する問題を，禁止マイナーの観点から拡張することを行った．とくに完全２部グラフをマイナーとして含まないグラフのタフネス，全域木に関する性質で顕著な成果が上がった．加えて，禁止部分グラフによる同種の問題にも成果があった．

研究成果の概要（英文）：
From a given graph G, a graph obtained from a subgraph of G by contracting several edges is called a minor of G. Some important classes of graphs, such as planar graphs are closed under the operation taking a minor, and are characterized by forbidden minors. In this research, we extend some results of planar graphs concerning cycles, spanning trees and factors, from the point of view of forbidden minors. In particular, we obtained some results on the toughness and the spanning trees in graphs without complete bipartite minors. We also considered similar problems on the forbidden induced subgraphs.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
2008 年度	1,400,000	420,000	1,820,000
2009 年度	1,200,000	360,000	1,560,000
2010 年度	1,200,000	360,000	1,560,000
2011 年度	1,000,000	300,000	1,300,000
年度			
総　計	4,800,000	1,440,000	6,240,000

研究分野：　数物系科学
科研費の分科・細目：　数学・数学一般（含確率論・統計数学）
キーワード：組合せ論

１．研究開始当初の背景

グラフ G から，点の削除，辺の削除，辺の縮約を繰り返して得られるグラフを，G のマイナーと呼ぶ．平面グラフなど，グラフ理論とその応用において重要なグラフの族は，しばしば，マイナーを得る操作に関して閉じている．このようなグラフの族は，禁止マイナーによって特徴づけされる．しかも，Robertson と Seymour によるグラフマイナー定理によれば，有限個の禁止マイナーによって特徴づけされることもわかっている．

平面グラフをはじめとする閉曲面に埋め

込まれたグラフについての研究は，位相幾何学的グラフ理論と呼ばれ盛んに研究されている．位相幾何学的グラフ理論の研究は，(1) グラフの埋め込みそのものに関する研究，(2) 埋め込まれたグラフの組合せ構造に関する研究，の２つに大別できる．前者に属する研究としては，グラフの種数や交差数に関する研究がある．後者の位相幾何学的グラフ理論の例としては，任意の平面グラフは４彩色可能である，という四色定理や，任意の４連結平面グラフがハミルトン閉路を含む，という Tutte の定理が挙げられる．研究代表者は，この Tutte の定理を３連結グラフに緩和した場合についての研究を行い，閉曲面上に埋め込まれた３連結グラフがもつ全域木，２連結全域部分グラフなどに関する研究成果を上げた．この成果に関連して，閉曲面上に埋め込まれた局所平面性の高いグラフのハミルトン性に関する研究はさらに進展している．

ハミルトン閉路や全域木といったグラフの組合せ構造の存在が，位相幾何学的な概念と関連するのは興味深いが，本来組合せ的構造であるハミルトン閉路・全域木の存在は，組合せ的な理由で発生すると考えるのが自然である．閉曲面に埋め込める，という性質に対応する組合せ的性質として禁止マイナーを考え，禁止マイナーによって特徴付けられたグラフの組合せ構造の研究を行う．とくに，禁止マイナーによるグラフの族と，位相幾何学的な制約のあるグラフの族との違いについては非常に興味深い．

一方で，ハミルトン閉路などの全域部分グラフの存在に関する研究としては，「どのくらい完全グラフに近ければ存在するか」という観点から，辺数や最小次数に関する条件によるものが古くから行われている．一般に次数などの条件だけでハミルトン閉路の存在を保証しようとすると，かなり多くの辺を含むことを仮定しなければならないが，辺数がある程度多くてハミルトン閉路を含まないグラフは特徴的な構造を持つため，そのような構造を禁止することによって，十分条件を大幅に緩和できるのではないか，という研究の流れがある．最も有名な予想として，４連結クローフリーグラフ（クロー $K_{1,3}$ を誘導部分グラフとして禁止したグラフ）はハミルトン閉路を持つであろう，という予想があり，この周辺の研究は盛んに行われている．本研究で扱う禁止マイナーは，禁止部分グラフよりも大域的な性質なので，ハミルトン閉路などの大域的な部分構造とは相性がいいのではないか，と考えられる．

２．研究の目的

グラフ理論において，多くの重要なグラフの族，例えば平面グラフやシリーズパラレルグラフなどは，禁止マイナーによって特徴づけされる．アルゴリズム的側面から見ても，与えられたグラフがそのようなグラフの族に属するかどうかは多項式時間で判定できる，という意味において比較的扱いやすいグラフの族と言える．実際，平面グラフをはじめとして，特定の閉曲面に埋め込まれるグラフについての理論は，位相幾何学的グラフ理論として，多くの研究がなされている．しかしそのようなグラフの族を特徴付けるには，平面グラフなどの単純なケースを除くと，膨大な禁止マイナーを必要とすることがわかっている．一方で，四色定理の深遠なる一般化である Hadwiger 予想のように，禁止マイナーの観点からは非常に単純なグラフの族についてもその染色数について大きな問題が残されている．本研究では，禁止マイナーの観点からは従来あまり研究されていなかった，閉路問題，全域木問題，因子問題に焦点を当て，単純な禁止マイナーによって特徴付けられるグラフの部分構造について解明することを目的とする．

特定の閉曲面上に埋め込めるグラフの族は，有限個の禁止マイナーによって特徴付けられる．平面の場合は，K_5 と $K_{3,3}$ を禁止すればよいが，射影平面では 35 個の禁止マイナーが必要であり，それ以上の種数を持つ閉曲面では，具体的に禁止マイナーが決定されていない．トーラスの場合ですら，少なくとも数千の禁止マイナーが必要であることがわかっているのみである．

このように，閉曲面上に埋め込めるグラフの族は，位相幾何学的には非常に素直な族であるが，禁止マイナーの観点からは極めて複雑な族であると言える．本研究では，位相幾何学的グラフ理論のアナロジーとして，少数の禁止マイナーによって特徴付けられるグラフの族が持つ組合せ的性質について研究し，位相幾何学的グラフ理論との違いを明白にする．

とくに，平面グラフのアナロジーとして，完全２部グラフをマイナーとして禁止した場合について考える．平面グラフは，K_5 と $K_{3,3}$ をマイナーとして禁止することによって特徴付けられるが，３連結平面グラフは，K_5 それ自身を除いては，$K_{3,3}$ をマイナーとして禁止することによって特徴付けられる．$K_{3,3}$ を一般の完全２部グラフ $K_{a,b}$ に置き換え，それをマイナーとして禁止したグラフについて考える．とくに a 連結を仮定すると，$K_{a,b}$ をマイナーとして含まないグラフは，toughness という不変量（この不変量は，グラフのハミルトン性とも関係がある）がある程度大きいということがわかっているため，ハミルトン性に類似した性質の解明を行う．

３．研究の方法

まず，本研究代表者および研究分担者・研

究協力者が今までに行ってきた閉曲面上のグラフの閉路・全域木・因子に関する研究成果をベースとして，閉曲面上での理論を禁止マイナーの観点から見直した．具体的には，閉曲面に埋め込まれたグラフの閉路・全域木・因子に関する結果を，禁止マイナーを用いて拡張・一般化することを目標として，位相幾何学的グラフ理論と異なる手法の開発にあたった．そのために，まず平面グラフで培われてきた理論を，$K_{3,3}$ をマイナーとしてもたないグラフの理論として，平面性を使わない手法の構築を行った．

また，閉路問題，因子問題においては一般的となっている，禁止部分グラフに関する条件や次数条件を見直すことにより，禁止マイナーに次数条件を組み合わせた条件下での閉路・因子の存在についても検討を行った．

一方で，グラフに対する位相幾何学的制約の本質を見極めるために，与えられた閉曲面に埋め込むことの出来るグラフを特徴付けるための膨大な禁止マイナーのリストのうち，どれが本質的であるかについて，閉路問題・因子問題の観点から調査する．とくに，禁止マイナーのリストが確定している射影平面的グラフからその調査を開始し，その一般化を目指した．

研究の大きな流れとしては，次の２点にしぼられる．

１）位相幾何学的グラフ理論から禁止マイナーによるグラフ理論へ

与えられた閉曲面に埋め込むことの出来るグラフは，有限個の禁止マイナーで特徴付けられるが，必要となる禁止マイナーの個数は，平面で 2 個，射影平面で 35 個，それ以外の閉曲面では決定されていない（決定が困難なほど個数が多い）．しかし，閉曲面上のグラフの組合せ構造を議論するにあたって，それだけ多くの禁止マイナーが同等に重要であるとは考えにくい．禁止マイナーの個数を少数に制限したときに，そのようなグラフの族がもつ組合せ的性質について考え，閉曲面上のグラフの性質との相違・類似性について解明する．

具体的な目標として，３連結平面グラフが最大次数３以下の全域木を持つ，という Barnette の定理を，$K_{3,3}$ をマイナーとして持たない３連結グラフ（これはほぼ３連結平面グラフと同値である）について，平面性を介さない証明を試みた．このアプローチでは，位相幾何学的グラフ理論の道具を駆使した議論を，純粋に組合せ的な議論を対応させる必要があった．挑戦的課題としては，４連結平面グラフのハミルトン性を，平面性を用いずに，$K_{3,3}$ をマイナーとして持たない４連結グラフの性質として議論することも考えられたが，これに関しては現在までのところブレークスルーを得られているとは言えない．

制限する禁止マイナーの個数を少数に制限した状況では，位相幾何学的議論との差が大きくなり，従来のアナロジーがきかなくなる可能性も考えられる．２因子（すべての頂点の次数が２であるような全域部分グラフ）の存在においては，閉曲面上のグラフの禁止マイナーとして２部グラフが本質的である，ということを示唆する結果が示されている．ひとつの代替策として，禁止マイナーの数をある程度増やして議論する方策，たとえば，ある閉曲面に埋め込むことのできない２部グラフをすべてマイナーとして禁止する，というアプローチも試みた．

閉曲面上のグラフと禁止マイナーのより簡潔な関係を見いだすため，考えるグラフを三角形分割に制限する，というアプローチも行った．

２）禁止誘導部分グラフと禁止マイナー

従来，グラフのハミルトン性には，グラフの次数条件，連結度と独立数に関する条件，あるいはそれらを組合せた条件を中心に，研究がなされてきた．さらに，ハミルトン性と関連して研究されてきたもののひとつに，クローフリーグラフがある．クローフリーグラフとは，誘導部分グラフとして $K_{1,3}$ を含まないグラフのことである．とくに，４連結クローフリーグラフはハミルトン閉路を持つという，Matthews-Sumner 予想もある．この予想に関連して，禁止誘導部分グラフにより制限されたグラフの族について考え，禁止マイナーによって制限されたグラフの族との構造的な違いについて議論を行った．

まず，グラフから切断点集合を取り除いたときにできる連結成分数とその切断点集合の頂点数の比である toughness という不変量がある．この不変量は，グラフのハミルトン性やそれに類する性質（最大次数が制限された全域木，最大次数が制限された全域２連結グラフなど）と関連が深い．一方で，この toughness という不変量が禁止マイナーや禁止誘導部分グラフとどのような関係にあるかを議論することは重要である．とくに $K_{3,3}$ の自然な一般化として，完全２部グラフ $K_{a,b}$ をマイナーとして禁止したグラフについて考え，とくに a 連結で $K_{a,b}$ をマイナーとして含まないグラフの toughness に関する研究を進めた．また他方，toughness と禁止誘導部分グラフの関係についても研究を行い，ある程度の toughness を保証するための禁止誘導部分グラフとしてどのようなものがあるかについて研究を進めた．

研究組織に参加する研究代表者，研究分担者，連携研究者の間の情報交換および研究討論は，研究集会や定期的に開催しているセミナーで集まり行った．議論に格段の進展がみられる際には，個別に連絡をとるなどしてとりまとめを行った．

４．研究成果

グラフの toughness とは，そのグラフからある頂点集合を取り除いたときにできる連結成分数と取り除いた頂点数との比に関するものである．この概念は，グラフのハミルトン性と関連付けられて定義された量であるが，ハミルトン性に類する多くのグラフの性質で顔を出す不変量である．

まず，平面グラフの理論を禁止マイナーの観点から再構築する研究を行った．３連結平面グラフが $K_{3,3}$ をマイナーとして含まない３連結グラフとほぼ同義であることに着目し，$K_{a,b}$ をマイナーとして含まない a 連結グラフの toughness が，a,b によって定まるある正定数より大きくなることを証明した．この定数は，a=3 のときについては最善の値として求めた．この事実は，$K_{a,b}$ をマイナーとして含まない a 連結グラフが，ハミルトン閉路やそれに類する構造を含みやすいことを示唆しており，実際，最大次数が制限された全域木の存在については，Win の定理により導くことができる．

上記の toughness の結果と Win の定理を組み合わせて得られる結果は，$K_{3,3}$ をマイナーとして含まない３連結グラフには，最大次数が４以下の全域木が存在する，というものになる．しかし，Barnette の定理によれば，３連結平面グラフには最大次数３以下の全域木を持つことが知られている．最大次数を制限した全域木については，Barnette の定理を真に含む形の次の定理を示した．任意の偶数 t に対して，$K_{3,t}$ をマイナーとして持たない３連結グラフは最大次数 t-1 以下の全域木を含む．この定理はすべての t に対して最善であると同時に，t が奇数のときには成り立たない，という意味においても最善である．

閉曲面上のグラフと禁止マイナーのより簡潔な関係を見いだすため，考えるグラフを三角形分割に制限し，どのような完全グラフをマイナーとして含むか，という研究を行った．射影平面，トーラス，クラインボトル上の三角形分割について，K_6 をマイナーとして含まないグラフには極めてきれいな特徴付けができ，それぞれの閉曲面に四角形分割として埋め込むことのできる完全グラフが重要な役割を果たすことがわかった．

禁止マイナーと禁止誘導部分グラフとの違いを明白にするため，グラフの toughness と禁止誘導部分グラフの関係についての研究を進めた．とくに，頂点数が十分大きいグラフにおいて，どのような誘導部分グラフ（いくつかの誘導部分グラフの組）を禁止することで一定以上の toughness が保証されるかについて考え，そのような禁止誘導部分グラフの組をすべて決定することができた．

関連する研究として，toughness 以外の種々のグラフの性質に対しても，禁止誘導部分グラフでその性質をインプライする禁止誘導部分グラフの特徴付けをする研究を行った．この研究においては比較的多くの成果が上がった．これまでの研究の流れにそった形で，完全マッチングを保証する禁止誘導部分グラフ，クローフリーとなるための禁止誘導部分グラフ，スターフリーとなるための禁止誘導部分グラフの組を特徴付けした．これまでの多くの研究では，高々３個の禁止誘導部分グラフでの特徴付けがなされているのみであったが，個数を制限しない禁止誘導部分グラフによる完全な特徴付けが完全になされているようなグラフの性質が複数見つかったことになる．この流れの研究では，完全マッチングの拡張として，主に２因子に関する研究がなされ，少数の禁止誘導部分グラフに加えて次数条件などを加えることにより，２因子の存在を保証する条件に関する結果も得られている．

５．主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計 23 件）

1. J. Fujisawa and K. Ota: Maximal K_3's and Hamiltonicity of 4-connected claw-free graphs. J. Graph Theory 70 (2012), 40-53.（査読有）

2. J. Fujisawa, K. Ota, K. Ozeki and G. Sueiro: Forbidden induced subgraphs for star-free graphs. Discrete Math. 311 (2011), 2475-2484.（査読有）

3. R.E.L. Aldred, Y. Egawa, J. Fujisawa, K. Ota and A. Saito: The existence of a 2-factor in $K_{1,n}$-free graphs with large connectivity and large edge-connectivity. J. Graph Theory 68 (2011), 77-89.（査読有）

4. G. Chen, Y. Egawa, K. Kawarabayashi, B. Mohar and K. Ota: Toughness of $K_{a,t}$-minor-free graphs. Electron. J. Combin. 18 (2011) Paper 148, 6pp.（査読有）

5. K. Ota, M.D. Plummer and A. Saito: Forbidden triples for perfect matchings. J. Graph Theory 67 (2011), 250-259.（査読有）

6. R.E.L. Aldred, J. Fujisawa and A. Saito: Forbidden subgraphs and the existence of a 2-factor. J. Graph Theory 64 (2010), 250-266.（査読有）

7. R. Mukae and A. Nakamoto: K_6-minors in triangulations and complete

quadrangulations. J. Graph Theory 60 (2009), 302-312. (査読有)

8. R.E.L. Aldred, J. Fujisawa and A. Saito: Two forbidden subgraphs and the existence of a 2-factor in graphs. Australas. J. Combin. 44 (2009), 235-246. (査読有)

9. A. Nakamoto, Y. Oda and K. Ota: 3-trees with few vertices of degree 3 in circuit graphs. Discrete Math. 309 (2009), 666-672. (査読有)

10. K. Kawarabayashi, R. Mukae and A. Nakamoto: K_6-minors in triangulations on the Klein bottle. SIAM J. Discrete Math. 23 (2008/09), 96-108. (査読有)

11. Y.T. Ikebe and A. Tamura: On the existence of sports schedules with multiple venues. Discrete Appl. Math. 156 (2008), 1694-1710. (査読有)

12. Y. Egawa, J. Fujisawa, S. Fujita and K. Ota: On 2-factors in r-connected $\{K_{1,k}, P_4\}$-free graphs. Tokyo J. Math. 31 (2008), 415-420. (査読有)

〔学会発表〕(計 14 件)

1. 藤沢潤: 3-連結グラフにおけるハミルトン性のための禁止部分グラフのペアについて, 日本数学会, 2012 年 3 月 26 日, 東京理科大学.

2. 小田芳彰: 経路問題と計算量, 研究集会「離散数理構造とその応用」, 2011 年 11 月 19 日, 名古屋大学.

3. 太田克弘: Some problems in extremal graph theory, 研究集会「離散数理構造とその応用」, 2011 年 11 月 18 日, 名古屋大学.

4. K. Ota: Minimum degree condition for forests, Workshop Cycles and Colourings 2011, 2011 年 9 月 8 日, Novy Smokovec, Slovakia.

5. 藤沢潤: Forbidden subgraphs for hamiltonicity of 3-connected graphs, 日本数学会, 2011 年 3 月 20 日, 早稲田大学.

6. G. Sueiro, 太田克弘, 小関健太, 藤沢潤: Forbidden subgraphs implying graph properties, 日本数学会, 2010 年 3 月 24 日, 慶應義塾大学.

7. 田村明久: 安定マッチングモデルとその拡張, 「制度・政策デザインとその評価」ワークショップ, 2010 年 2 月 13 日, 筑波大学.

8. G. Sueiro, 太田克弘: Forbidden induced subgraphs for perfect matchings, 日本数学会, 2009 年 9 月 24 日, 大阪大学.

9. 榎本彦衛, 藤沢潤, 太田克弘: 極大 K_3 と４連結 claw-free グラフのハミルトン性について, 応用数学合同研究集会, 2008 年 12 月 15 日, 龍谷大学.

10. O. Fourtounelli, J. Fujisawa and P. Katerinis: On 2-factors in star-free graphs, 日本数学会, 2008 年 9 月 24 日, 東京工業大学.

６．研究組織

(1)研究代表者

太田 克弘 (OTA KATSUHIRO)
慶應義塾大学・理工学部・教授
研究者番号：40213722

(2)研究分担者

田村 明久 (TAMURA AKIHISA)
慶應義塾大学・理工学部・教授
研究者番号：50217189

小田 芳彰 (ODA YOSHIAKI)
慶應義塾大学・理工学部・准教授
研究者番号：90325043

石井 一平 (ISHII IPPEI)
慶應義塾大学・理工学部・准教授
研究者番号：90051929

(3)連携研究者

中本 敦浩 (NAKAMOTO ATSUHIRO)
横浜国立大学・教育人間科学部・准教授
研究者番号：20314445

山下 登茂紀 (YAMASHITA TOMOKI)
近畿大学・理工学部・講師
研究者番号：10410458

藤沢 潤 (FUJISAWA JUN)
慶應義塾大学・商学部・専任講師
研究者番号：00516099