

機関番号：12401

研究種目：基盤研究 (B)

研究期間：2008～2010

課題番号：20340026

研究課題名 (和文) 完全非線形方程式の粘性解理論とその応用

研究課題名 (英文) Viscosity solution theory for fully nonlinear equations and its applications

研究代表者

小池 茂昭 (KOIKE SHIGEAKI)

埼玉大学・大学院理工学研究科・教授

研究者番号：90205295

研究成果の概要 (和文)：

完全非線形2階楕円型偏微分方程式の粘性解の基礎理論を研究した。一様楕円型方程式が1階微分項に非有界係数がある場合に、 $L_p$ 粘性解に対し、弱ハルナック不等式が成立することが証明された。その応用として、強最大値原理、非有界領域での最大値原理、Phragmen-Lindelof定理など、 $L_p$ 粘性解の定性的性質が示された。

また、退化楕円型方程式が1階微分項に関して一次以上の増大度がある場合に、粘性解が属する適切な関数空間を設定し、その下で粘性解の比較原理を証明した。

研究成果の概要 (英文)：

The basic theory for viscosity solutions of fully nonlinear second order elliptic partial differential equations is studied. In case when uniformly elliptic equations contain unbounded coefficients to the first derivatives, it is proved that the weak Harnack inequality holds for  $L_p$ -viscosity solutions. As applications, it turns out that qualitative properties such as the strong maximum principle, the maximum principle for unbounded domains, the Phragmen-Lindelof theorem etc. are shown.

In case when degenerate elliptic equations contain the first derivative terms with superlinear growth, by setting appropriate function spaces, to which viscosity solutions belong, the comparison principle for them is proved.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2008年度	3,900,000	1,170,000	5,070,000
2009年度	3,600,000	1,080,000	4,680,000
2010年度	3,900,000	1,170,000	5,070,000
年度			
年度			
総計	11,400,000	3,420,000	14,820,000

研究分野：非線形偏微分方程式

科研費の分科・細目：数学・基礎解析学

キーワード：粘性解、楕円性、完全非線形方程式、最大値原理、ハルナック不等式、比較原理

## 1. 研究開始当初の背景

粘性解は完全非線形退化2階楕円型・放物型偏微分方程式の弱解として Crandall と Lions によって 1980 年代初頭に導入され、粘性解の存在・一意性など様々な研究がされ

ることによって、粘性解が弱解として適切であることが明らかになった。一方、一様楕円型に限定した場合の粘性解の正則性について、Caffarelli によるブレイクスルーがあり、Caffarelli-Crandall-Kocan-Swiech により、

Lp 粘性解の概念が導入され、単純な場合に最大値原理や正則性の研究がされた。しかし、低階の項（つまり、一階微分項）に非有界係数がある場合は、応用上重要であるにもかかわらず、研究されていなかった。研究代表者（小池）と Swiech（ジョージア工科大学教授）の共同研究により、完全非線形 2 階一様楕円型・放物型方程式の Lp 粘性解に対し、最大値原理が証明された(2007 年)。更に、1 階微分項が一次以上の増大度を持つ場合にも最大値原理の成立する十分条件と、一般の場合の成立しない例が与えられた(2004 年)。しかし、最大値原理の次のステップであるハルナック不等式は本研究開始時には得られていなかった。

また、退化した場合も込めた粘性解の比較原理は、粘性解理論研究の中心的話題であった。しかし、一階微分項が一次以上の増大度を持ち、更に変数係数を持つ場合の非有界領域における粘性解の比較原理は長らく未解決であった。

## 2. 研究の目的

完全非線形 2 階楕円型偏微分方程式の粘性解の定性的性質を研究する。

- (1) 一様楕円型の場合の、正則性に関する次のステップとして弱ハルナック不等式が成立することを示す。更に、境界での弱ハルナック不等式も示し、強最大値原理、非有界領域での最大値原理、Phragmen-Lindelof 定理などの一般化を研究する。
- (2) 退化した場合も込めて、1 階微分項に関して一次以上の増大度のある場合の粘性解の非有界領域における比較原理を確立する。

## 3. 研究の方法

一様楕円型の場合の Lp 粘性解の正則性の研究に関しては、Swiech と共同研究を進めた。Lp 粘性解の定性的性質に関しては、Vitolo(サレルノ大学教授)や中川(埼玉大学非常勤研究員)と共同研究を進めた。

退化も含めた粘性解の比較原理に関しては、Ley (レンヌ大学教授) と共同研究を進めた。

## 4. 研究成果

完全非線形一様楕円型偏微分方程式の一階微分項に非有界係数がある場合の弱ハルナック不等式が成立することを証明した。さらに、一階微分項が一次以上の増大度を持つ場合は、まず、対応するプッチ方程式の強解の存在定理を示すことにより、弱ハルナック不等式が成り立つことを示すことに成功した。更に、臨界指数の場合の最大値原理・弱ハルナック不等式の証明を試みた。以上は

Swiech との共同研究による。

(1)の応用として、Swiech との共同研究で、一般的な条件下で強最大値原理を示した。また、境界弱ハルナック不等式を示した。一方、この境界弱ハルナック不等式を応用して、中川と Phragmen-Lindelof の定理を一般化した。更に、Vitolo と中川と共同で一般化に取り組んでいる。

退化した場合を含んだ方程式に関しては、まず、一階微分項が凸の場合に、従来の結果を含むように適切な関数空間を設定し、比較原理が成立することを示した。また、凸性が成り立たない場合もいくつかの部分的な解決を得た。更に、方程式系への一般化も研究した。一方、関数空間が適切であることを示すために、関数空間を広げた場合に比較原理が成り立たない例を見つけた。以上は Ley との共同研究である。

## 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 18 件)

- ① S. Koike, Weak Harnack inequality for fully nonlinear PDEs with superlinear growth terms in Du, 数理解析研究所講究録 1695 巻「微分方程式の粘性解理論とその周辺」(2010 年), 139-147(査読無)
- ② H. Ishii and Y. Matsumura, Non-local Hamilton-Jacobi equations arising in dislocation dynamics. Z. Anal. Anwend. 29 巻 (2010 年) 309-350(査読有)
- ③ H. Ishii and G. Nakamura, A class of integral equations and approximation of  $p$ -Laplace equations. Calc. Var. Partial Differential Equations 37 巻 (2010 年) 485-522(査読有)
- ④ H. Hata, H. Nagai and S.-J. Sheu, Asymptotics of the probability minimizing a "down-side" risk. Ann. Appl. Probab. 20 巻(2010 年) 52-89(査読有)
- ⑤ S. Koike, Recent developments on maximum principle for Lp-viscosity solutions of fully nonlinear elliptic/parabolic PDEs. Recent Progress on Reaction-Diffusion Systems and Viscosity Solutions, 131-153, World Sci. Publ., Hackensack, NJ, 2009 年(査読有)
- ⑥ S. Koike and K. Nakagawa, Remarks on the Phragmen-Lindelof theorem for Lp-viscosity solutions of fully nonlinear PDEs with unbounded ingredients. Electron. J. Differential Equations ,

- 146 卷,(2009 年) 1-14(査読有)
- ⑦ S. Koike and A. Swiech, Weak Harnack inequality for fully nonlinear uniformly elliptic PDE with unbounded ingredients. J. Math. Soc. Japan 61 卷 (2009 年)723-755(査読有)
- ⑧ S. Koike and A. Swiech, Existence of strong solutions of Pucci extremal equations with superlinear growth in Du. J. Fixed Point Theory Appl. 5 卷 (2009 年) 291-304(査読有)
- ⑨ H. Ishii and H. Mitake, Two remarks on periodic solutions of Hamilton-Jacobi equations. Recent progress on reaction-diffusion systems and viscosity solutions, 97-119, World Sci. Publ., Hackensack, NJ, 2009 年(査読有)
- ⑩ N. Ichihara and H. Ishii, Long-time behavior of solutions of Hamilton-Jacobi equations with convex and coercive Hamiltonians. Arch. Ration. Mech. Anal. 194 卷 (2009 年), 383-419(査読有)
- ⑪ T. Mikami, Optimal transportation problem on stochastic mechanics, Selected papers on probability and statistics, 75-94, Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, 227 卷 Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2009 年(査読有)
- ⑫ N. Ichihara and H. Ishii, The large-time behavior of solutions of Hamilton-Jacobi equations on the real line. Methods Appl. Anal. 15 卷 (2008 年) 223-242(査読有)
- ⑬ N. Ichihara and H. Ishii, Asymptotic solutions of Hamilton-Jacobi equations with semi-periodic Hamiltonians. Comm. Partial Differential Equations 33 卷(2008 年) 784-807(査読有)
- ⑭ H. Ishii, Asymptotic solutions for large time of Hamilton-Jacobi equations in Euclidean  $n$  space. Ann. Inst. H. Poincare Anal. Non Lineaire 25 卷 (2008 年) 231-266(査読有)
- ⑮ T. Mikami and M. Thieullen, Optimal transportation problem by stochastic optimal control. SIAM J. Control Optim. 47 卷 (2008 年) 1127-1139(査読有)
- ⑯ H. Nagai and W. J. Runggaldier, PDE approach to utility maximization for market models with hidden Markov factors. Seminar on Stochastic Analysis, Random Fields and Applications V, 493-506, Progr. Probab., 59 卷, Birkhauser, Basel, 2008 年(査読有)

- 有)
- ⑰ H. Morimoto and X. Y. Zhou, Optimal consumption in a growth model with the Cobb-Douglas production function. SIAM J. Control Optim. 47 卷 (2008 年) 2991-3006(査読有)
- ⑱ H. Morimoto, Optimal consumption models in economic growth. J. Math. Anal. Appl. 337 卷 (2008 年) 480-492(査読有)

[学会発表] (計 9 件)

- ① 小池茂昭 「On viscosity solutions of fully nonlinear elliptic PDE with measurable and unbounded ingredients」 2011 年 1 月 14 日, Nonlinear PDE's, Valparaiso (Chile)
- ② 小池茂昭 「Lp 粘性解の最近の進展について」 2010 年 12 月 21 日, 第 8 回浜松偏微分方程式研究集会, 静岡大学
- ③ 小池茂昭 「完全非線形楕円型偏微分方程式の Lp 粘性解について」 2010 年 12 月 18 ~ 19 日, 研究集会「微分方程式の総合的研究」, 京都大学
- ④ 小池茂昭 「On the weak Harnack inequality for fully nonlinear PDEs with unbounded ingredients」 2010 年 7 月 21 日, 研究集会「Viscosity methods and nonlinear PDE」 北海道大学
- ⑤ 小池茂昭 「Weak Harnack inequality for fully nonlinear PDEs with unbounded ingredients」 2010 年 6 月 2 日, Positivity: A key to fully nonlinear equations Conference, Salerno (Italy)
- ⑥ 小池茂昭 「Weak Harnack inequality for Lp-viscosity solutions of fully nonlinear PDEs with unbounded ingredients」 2009 年 12 月 2 日, The Second Chile-Japan Workshop on Elliptic and Parabolic Equations, 明治大学
- ⑦ 小池茂昭 「Weak Harnack inequality for Lp-viscosity solutions of fully nonlinear elliptic PDEs with unbounded ingredients」 2009 年 7 月 18 日, The Second International Conference of Reaction Diffusion Systems and Viscosity Solution, Providence University (台湾)
- ⑧ 小池茂昭 「Weak Harnack inequality for fully nonlinear PDEs with superlinear growth terms in Du」 2009 年 6 月 26 日, 研究集会「微分方程式の粘性解とその周辺」, 京都大学数理解析研究所

- ⑨ 小池茂昭「Recent developments on the ABP maximum principle for fully nonlinear elliptic PDEs」2008年9月22日，第4回非線型の諸問題，佐賀大学

〔図書〕（計1件）

- (1) International Conference for the 25th Anniversary of Viscosity Solutions, GAKUTO International Series, Mathematical Sciences and Applications, 30巻 edited by Y. Giga, K. Ishii, S. Koike, T. Ozawa, N. Yamada, Gakkotosho, (2008年) Tokyo Japan.

〔産業財産権〕

○出願状況（計0件）

名称：  
発明者：  
権利者：  
種類：  
番号：  
出願年月日：  
国内外の別：

○取得状況（計0件）

名称：  
発明者：  
権利者：  
種類：  
番号：  
取得年月日：  
国内外の別：

〔その他〕

ホームページ等

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

小池 茂昭 (KOIKE SHIGEAKI)  
埼玉大学・大学院理工学研究科・教授  
研究者番号：90205295

### (2) 研究分担者

石井 仁司 (ISHII HITOSHI)  
早稲田大学 教育・総合科学学術院・教授  
研究者番号：7010202887

三上 敏夫 (MIKAMI TOSHIO)  
広島大学・大学院工学研究科・教授  
研究者番号：70229657

石井 克幸 (ISHII KATSUYUKI)  
神戸大学・大学院海事科学研究科・准教授  
研究者番号：40232227

長井 英生 (NAGAI HIDEO)  
大阪大学・大学院基礎工学研究科・教授  
研究者番号：70110848

(2008年のみ研究分担者)

森本 宏明 (MORIMOTO HIROAKI)  
愛媛大学・大学院理工学研究科・教授  
研究者番号：80166438

### (3) 連携研究者

( )

研究者番号：