

機関番号：17102

研究種目：基盤研究（B）

研究期間：2008～2010

課題番号：20340032

研究課題名(和文) 量子場相互作用系の非摂動的スペクトル解析

研究課題名(英文) Non-perturbative analysis of quantum interaction systems

研究代表者

廣島 文生 (HIROSHIMA FUMIO)

九州大学・大学院数理学研究院・准教授

研究者番号：00330358

研究成果の概要（和文）：

量子場相互作用系の基底状態の解析を行った。また汎関数積分表示を用いて非摂動的にその系の無限次元的な解析を行った。特にローレンツ多様体上に定義されたネルソン模型の基底状態の存在・非存在を示し、超局所解析をつかって紫外切断をはずした。続いて不定計量ヒルベルト空間に定義された Pauli-Fierz 模型の完全漸近性を示した。Enhanced binding については Pauli-Fierz 模型の no-binding 領域を特定し、相対論的な Nelson 模型の enhanced binding を示した。汎関数積分表示に関してはスピン 1/2 をもった相対論的シュレディンガー作用素の生成する熱半群をブラウン運動、ポアソン過程、subordinator を用いて表し、非自明なエネルギー不等式を得た。またラプラシアンベルンシュタイン関数から作られる一般化されたシュレディンガー作用素に対しても同様の経路積分表示を構成し、場の理論のスピン-ボゾン模型にもこれを応用し基底状態の一意性を示した。さらに確率 2 重積分をポテンシャルを持った無限体積 Gibbs 測度の存在を示すことに成功した。

研究成果の概要（英文）：

Ground states of quantum interaction systems are investigated. By means of functional integral representations quantum systems are studied in non-perturbative way. We show the existence and absence of ground states of the so-called Nelson model defined on a Lorentz manifold, we remove the UV cutoff by means of micro-local analysis. The asymptotic completeness of the Pauli-Fierz model defined on an indefinite Hilbert space is also established. We investigate enhanced bindings. We specify the no-binding regime of the Pauli-Fierz model and show the enhanced binding of the relativistic Nelson model. We next consider functional integrations. The heat semi-group generated by the relativistic Schroedinger operator with spin 1/2 is represented in terms of Brownian motions, Poisson processes and subordinators. By this we can derive a non-trivial energy comparison inequality. Moreover we extend this path integral representation to the Bernstein functions of the Laplacian, and apply this to a spin-boson model to show the uniqueness of the ground state. We furthermore succeeded to construct an infinite volume limit of the Gibbs measure with double stochastic integral as potential.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2008 年度	3,200,000	960,000	4,160,000
2009 年度	2,900,000	870,000	3,770,000
2010 年度	2,900,000	870,000	3,770,000
年度			
年度			
総計	9,000,000	2,700,000	11,700,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・基礎解析学

キーワード：場の量子論，無限次元解析，散乱理論，スペクトル解析，汎関数積分，基底状態，半群，確率過程

### 1. 研究開始当初の背景

場の量子論に現れるハミルトニアンは適当なヒルベルト空間上の自己共役作用素として実現できる．そのスペクトルを知ることにはその系の性質を完全に知ることに対応する．抽象的に述べれば以下のようなになる．

量子場を表すボゾンフォック空間 $\mathcal{F}$ と粒子の状態を表すヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ の複素数体上テンソル積ヒルベルト空間 $\mathcal{F} \otimes \mathcal{H}$ 上に作用する自己共役作用素 $H$ に相互作用といわれる摂動 $I$ を加える．自己共役作用素 $H+I$ のスペクトルを完全に知りたい．一般に $H$ のスペクトルはよく分かっている．特にその点スペクトルは全て埋蔵固有値となっている．よって我々の研究課題は埋蔵固有値の摂動問題と捉えることが出来る．このような問題に対して従来の摂動論的手法は $I$ が小さくても役に立たない．そこで汎関数積分などを用いて非摂動論的に全ハミルトニアン $H+I$ のスペクトルを解析しようというのが，本研究の背景である．特に $H+I$ のスペクトルの下限の様子(点スペクトルの存在・非存在および縮退度など)を明らかにしたい．

具体的な模型としてはスカラー場の模型である Nelson 模型やベクトル場の模型である Pauli-Fierz 模型の解析が基本的な問題である．

### 2. 研究の目的

#### (1) 基底状態の解析

①紫外切断をはずした Nelson 模型の基底状態の一意性を示す．

②Fermi 統計で多体 Nelson 模型の enhanced binding を示す．

③Pauli-Fierz 模型の基底状態の解析と確率 2 重積分の研究．

④並行移動不変な 2 体 Nelson 模型の基底状態の研究．

#### (2) 汎関数積分表示による解析

①相対論的 Pauli-Fierz 模型の解析．

②①の並行移動不変な場合，スピンを含む場合への拡張．

③Levy 過程によるファインマン・カツ公式の拡張．

④Spin-Boson 模型の解析．

#### (3) 場の量子論

①QED の数学的定式化．

②Wigner-Houghton 型非線形微分方程式の研究．

### 3. 研究の方法

『2. 研究目的』に沿って概略を述べる．

(1)

① 汎関数積分表示を構成してペロン・フロベニウスの定理を利用して示す．

② Griesemer-Lieb-Loss (Invent. Math. 2001) で示された binding 条件をチェックして示す．

③ 確率 2 重積分を累次積分に変形して極限操作をする．

④ (1)②と同様．

(2)

① Subordinator といわれる単調増加なパスをもった一次元 Levy 過程とブラウン運動の合成を利用する．

② F. Hiroshima (JFA, 2007) の方法を応用して並行移動不変な場合に拡張する．スピンを含む場合はポアソン過程を導入する．

③ (2)②を利用する．

④ (2)②を利用する．

(3)

①Bach-Frohlich-Sigal (CMP99), Griesemer-Lieb-Loss の理論を拡張する．

②くりこみ群(ブロックスピン変換)を応用する．

### 4. 研究成果

『2. 研究目的』に沿って述べる．

(1)

① 一意性は残念ながら，2011 年 3 月までには示せなかったが，半群の経路積分表示に Lorinczi (Loughborough 大) との共同研究で成功した．この表示を利用して無限次元のペロン・フロベニウスから一意性を示せると考えている．また Gerard (Orsay 大), Panati (Toulon 大), 鈴木 (信州大) との共同研究でローレンツ多様体上に定義された Nelson 模型の紫外切断を外すことに成功した (プレプリント⑤)．

② Fermi 統計ではなく相対論的な Nelson 模型に対して佐々木 (信州大) との共同研究で enhanced binding を示した．

③ 確率 2 重積分の存在を Betz (Warick 大) と

の共同研究で示した。我々の知る限り確率 2 重積分を相互作用にもったギブス測度の存在を示したのは初めてである。また Spohn (Munich 工科大) と鈴木の共同研究で Pauli-Fierz 模型の基底状態の非存在を示した (プレプリント④)。

④ 並行移動不変な Nelson 模型の研究は進展を見ることができなかつた。しかし Gerard, Panati, 鈴木との共同研究でローレンツ多様体上に定義された Nelson 模型の基底状態の存在・非存在の研究を行った (プレプリント⑤)。

(2)

① 汎関数積分表示を構成することに成功し、その表示を用いて相対論的 Pauli-Fierz 模型のスペクトルを解析した。これは当初の予想を超える研究成果であると自負している (⑦)。

② さらに (2)① の研究成果同様に並行移動不変な場合もスピンを含む場合も Pauli-Fierz 模型の汎関数積分表示を構成することができスペクトル解析に応用した。

③ 一瀬 (金大) と Lorinczi (Loughborough 大) の共同研究でファインマン・カツの公式をかなり一般的なものに拡張した。またこの表示を利用して一般的なシュレディンガー作用素のエネルギー不等式を得ることができた (プレプリント⑦⑧⑨)。

④ (2)② の簡単な応用で Spin-Boson 模型の汎関数積分表示を構成できた (プレプリント⑩)。

(3)

① 不定計量を備えたヒルベルト空間上に非相対論的 QED の模型を定義しその漸近完全性を鈴木 (信州大) との共同研究で示した。

② 伊東 (摂南大), 久世 (九大) との共同研究でくりこみ群を利用して僅かな進展をみた (⑫)。

プレプリントなど

⑬ F. Hiroshima, T. Ichinose and J. Lorinczi, Path integral representation for Schrodinger operators with Bernstein functions of the Laplacian.

⑭ F. Hiroshima, T. Ichinose and J. Lorinczi, Path integral representation for relativistic Schrodinger operators with spin 1/2.

⑮ C. Gerard, F. Hiroshima, A. Panati and A. Suzuki, Absence of ground state of the Nelson model with variable coefficients.

⑯ C. Gerard, F. Hiroshima, A. Panati and A. Suzuki, Removal of the UV cutoff for the Nelson Hamiltonian with variable coefficients

⑰ F. Hiroshima, H. Spohn and A. Suzuki, The

no-binding regime of the Pauli-Fierz model.

⑱ M. Hirokawa and F. Hiroshima, Note on spin-boson model through Poisson point process.

⑲ F. Hiroshima, T. Ichinose and J. Lorinczi, Lieb-Thirring type bound for Schrodinger operators with Bernstein functions of the Laplacian.

⑳ K. R. Ito, M. Kuze and F. Hiroshima, One-dimensional Schrodinger equations and renormalization groups of Wegner-Houghton-Aoki type, RIMS 講究録 1600 (2008), 204-218.

㉑ F. Hiroshima, Relativistic Pauli-Fierz model, COE Lecture Note (九大)30 (2011, 1月), 145-161.

## 5. 主な発表論文等

(研究代表者, 研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 18 件 (11 件査読有))

① C. Gerard, F. Hiroshima, A. Panati and A. Suzuki, Infrared problem for the Nelson model with variable coefficients, to appear in Commun. Math. Phys. 査読有 (2011)

② F. Hiroshima and I. Sasaki, On the ionization energy of semi-relativistic Pauli-Fierz model for a single particle, RIMS Kokyuroku Bessatsu B21 (2010), 25-34. 査読有

③ C. Gerard, F. Hiroshima, A. Panati and A. Suzuki, Existence and absence of ground states for a particle interacting through the quantized scalar field on a static spacetime, RIMS Kokyuroku Bessatsu B21 (2010), 15-24. 査読有

④ T. Hidaka and F. Hiroshima, Pauli-Fierz model with Kato-class potentials and exponential decays, Rev. Math. Phys. 22 (2010), 1181--1208. 査読有

⑤ F. Hiroshima and A. Suzuki, Physical state of nonrelativistic quantum electrodynamics, Ann. Henri Poincare 10 (2009), 913--953. 査読有

⑥ C. Gerard, F. Hiroshima, A. Panati and A. Suzuki, Infrared divergence of a scalar quantum field model on a pseudo Riemannian manifold, Interdisciplinary Information Science 15 (2009), 399--422. 査読有

⑦ V. Betz and F. Hiroshima, Gibbs measures with double stochastic integrals on path space, Infinite Dimensional Analysis,

Quantum Probability and Related Topics, 12 (2009), 135--152. 査読有

- ⑧ F. Hiroshima, Perturbation of embedded eigenvalues in quantum field theory, Sugaku exposition, 21 (2008), 177--207. 査読無
- ⑨ F. Hiroshima and I. Sasaki, Enhanced binding of an N particle system interacting with a scalar field I, Math. Z. 259 (2008), 657--680. 査読有
- ⑩ F. Hiroshima and J. Lorinczi, Functional integral representations of the Pauli-Fierz model with spin 1/2, J. Funct. Anal. 254 (2008), 2127--2185. 査読有

[学会発表] (計 18 件)

- ① F. Hiroshima, Feynman-Kac type formula with cadlag path and generalized Schrödinger operator with spin, 基研研究会, 2010 年 11 月 6 日, 京大基礎物理学研究所
- ② F. Hiroshima, Spectral analysis of QFT by functional integration with jump processes, Stochastic Process and their Applications 2010, 2010 年 9 月 10 日, 大阪.
- ③ F. Hiroshima, Feshbach map と Birman - Schwinger 原理による QED の enhanced binding, 作用素論研究集会, 2010 年 9 月 3-6 日, 松本中央公民館.
- ④ F. Hiroshima, Relativistic Feynman-Kac formula and its applications, 第 122 回日本数学会九州支部例会, 2010 年 2 月 13 日, 九大西新プラザ.
- ⑤ F. Hiroshima, Spectral analysis of relativistic Pauli-Fierz model in QED, RIMS 研究会 スペクトル・散乱理論とその周辺, 2009 年 12 月 2-4 日, 京大.
- ⑥ F. Hiroshima, Relativistic Pauli-Fierz model in QED by path measures, 数学的場の量子論とくりこみ理論, 2009 年 11 月 26-29 日, 九大西新プラザ.
- ⑦ F. Hiroshima, Relativistic QFT by path measures, 九州確率論研究会, 2009 年 11 月 14 日, 九大西新プラザ.
- ⑧ F. Hiroshima, Spectral analysis of relativistic Schrodinger operators by path measures II, 確率解析とその周辺, 2009 年 11 月 4-6 日, 東北大.
- ⑨ F. Hiroshima, Spectral analysis of relativistic Schrodinger operators by path measures I, 確率解析とその周辺, 2009 年 11 月 4-6 日, 東北大.
- ⑩ F. Hiroshima, Bernstein 関数の Laplacian を持った Schrodinger 作用素の経路積分, 日本数学会, 2009 年 9 月 24 日, 阪大.

⑪ F. Hiroshima, Relativistic Feynman-Kac formula with spin through Levy process, 第 11 回広島応用解析セミナー, 2009 年 9 月 1-2 日, 広大.

⑫ A. Suzuki, 非相対論的量子電気力学における物理的空間の非自明性, 日本数学会, 2009 年 3 月 26 日, 東大.

⑬ F. Hiroshima, Path Integral and Field Theory Model, 数理物理学若手セミナー, 2009 年 2 月 23-24 日, 摂南大.

⑭ F. Hiroshima, 量子場のハミルトニアン基底状態の存在と非存在について・広島の方法による深化発展, 場の理論に動機づけを持つ数学の諸問題, 2008 年 12 月 22-24 日, 佐賀大.

⑮ F. Hiroshima, Spectral analysis by path measures in QFT, 8th Sendai Workshop on Infinite Dimensional Analysis and Quantum Probability, 2008 年 11 月 10-12 日, 東北大.

⑯ F. Hiroshima, Semi-relativistic Pauli-Fierz model by path measures, RIMS 研究会, 非可換解析とマイクロ・マクロ双対性, 2008 年 11 月 4-6 日, 京大.

⑰ F. Hiroshima, Spectral analysis of QFT by functional integrations, Stochastic analysis and applications, 日独シンポ, 2008 年 9 月 8-12 日, 九大西新プラザ.

⑱ F. Hiroshima, Analysis of ground states in quantum field theory by functional integrations, The 24th Max Born Symposium, 2008 年 8 月 25-27 日, Wroclaw 大学・ポーランド.

[図書] (計 2 件)

① V. Betz, F. Hiroshima and J. Lorinczi, Feynman-Kac-Type Theorems and Gibbs Measures on Path Space. With Applications into Rigorous Quantum Field Theory, Walter de Gruyter, Studies in Mathematics 34, pp503, 2011 年 5 月出版予定.

② 廣島文生, 確率論的場の理論, 「数理科学」サイエンス社, 8 ページ, 2008 年 12 月号

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

廣島 文生 (HIROSHIMA FUMIO)  
九州大学・大学院数理学研究院・准教授  
研究者番号: 00330358

### (2) 研究分担者 なし

### (3) 連携研究者

伊東 恵一 (ITOU KEIICHI)  
摂南大学・工学部・教授  
研究者番号: 50268489

廣川 真男 (HIROKAWA MASAO)  
岡山大学・大学院自然科学研究科・教授  
研究者番号：70282788  
松井 卓 (MATSUI TAKU)  
九州大学・大学院数理学研究院・准教授  
研究者番号：50199733  
中野 史彦 (NAKANO FUMIHIKO)  
学習院大学・理学部・教授  
研究者番号：10291246  
尾畑 伸明 (OBATA NOBUAKI)  
東北大学・大学院情報科学研究科・教授  
研究番号：10169360  
服部 哲弥 (HATTORI TETSUYA)  
慶応大学・経済学部・教授  
研究者番号：10180902