

機関番号：12601

研究種目：基盤研究(B)

研究期間：2008～2010

課題番号：20340033

研究課題名(和文) 非線形偏微分方程式に現れる界面運動と爆発現象の研究

研究課題名(英文) Analysis of interface motion and blow-up phenomena in nonlinear partial differential equations

研究代表者

俣野 博 (MATANO HIROSHI)

東京大学・大学院数理科学研究科・教授

研究者番号：40126165

研究成果の概要(和文)：本研究では、(1)非線形拡散方程式の進行波、(2)非線形拡散方程式の特異極限と界面運動、(3)非線形熱方程式の解の爆発という申請時に掲げた3つのテーマに加えて、(4)3次元細胞電気生理学モデルの数学的研究という新しいテーマにも挑み、それぞれ成果が得られた。(1)では、障害物にぶつかる進行波、平面進行波の安定性、進行波の速度の最大化問題などを扱い、(3)ではソボレフ超臨界型熱方程式の爆発解の分類や、組みひも群の理論を用いた特異性の解析などを行った。

研究成果の概要(英文)：This research project deals with such themes as (1) traveling waves in nonlinear diffusion equations, (2) singular limit of nonlinear diffusion equations and interface motion, (3) blow-up in nonlinear heat equations, (4) mathematical analysis of 3D cellular electrophysiological model. The theme (4) was added after the program began. In theme (1), we studied, among other things, traveling waves colliding with obstacles, the stability of planar waves, and the problem of maximizing traveling wave speeds. In theme (3) we studied, among other things, classification of blow-up in Sobolev superlinear heat equations, and an application the theory of braid groups to the dead-core problem.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2008年度	5,300,000	1,590,000	6,890,000
2009年度	4,400,000	1,320,000	5,720,000
2010年度	4,700,000	1,410,000	6,110,000
年度			
年度			
総計	14,400,000	4,320,000	18,720,000

研究分野：非線形解析

科研費の分科・細目：数学・大域解析学

キーワード：非線形問題、非線形偏微分方程式、進行波、特異性、界面運動、解の爆発、電気生理学

1. 研究開始当初の背景

ある種の非線形偏微分方程式においては、解に一種の特異性ないし擬似特異性の「界面」が生じて空間内を伝播する現象が観察される。界面は、しばしば「進行波」という形で媒質の中を移動し、系の状態変化を周囲に伝

達する役割を担う。この界面が生まれるプロセスを明らかにし、その運動の様子を調べることが、多くの複雑な非線形現象を理解する上での鍵となる。また、解が局所的に無限大に発散する「爆発現象」も複雑なパターンの中にしばしば観察される。これらの現象を解

析するには、種々の漸近的手法に加えて、複雑な非線形ダイナミクスを大域的視点から理解する枠組みとしての無限次元力学系の理論が重要な役割を演じる。近年、こうした幅広い手法を駆使した非線形問題の研究の必要性が高まっている。

2. 研究の目的

本研究では、次の3つのテーマに関わる種々の問題の理論的解明を目指した。

- (1) 非線形拡散方程式に現れる進行波
- (2) 非線形拡散方程式の特異極限と界面運動
- (3) 非線形熱方程式の解の爆発

申請時の計画では、具体的には以下の問題に取り組む予定であった。

- (1) ①ノコギリ型境界をもつ帯状領域における進行波の研究 ②穴の開いた壁を通過する進行波の研究 ③進行波の速度を最大にする周期的ポテンシャルの研究 ④離散的拡散問題に現れる進行波面の形状の解明
- (2) 非等方的拡散方程式の特異極限
- (3) ①組みひも群の理論の **dead-core** 型特異性生成問題への応用 ②解の爆発後の挙動

3. 研究の方法

上記(1)①の問題については、研究分担者の中村健一および同済大学(中国)の B. Lou と定期的に討論会を開いて研究を行った。境界の波打ち方が周期的な場合は2006年に解決していたので、非周期的な場合を対象を絞った。境界の形状が非周期的な場合には、周期的な場合にはないさまざまな困難が現れる。この点の解決に最も長い時間を費やした。

(1)②については、フランスの F. Hamel および H. Berestycki と共同研究を進めた。(1)③は、中国科学技術大学の X. Liang らと研究を行った。問題の解決のためには、方程式の係数が関数ではなく測度である場合を扱う必要があり、この技術的難しさの克服に精力を注いだ。(1)④は、新たに開始した別の問題⑤⑥(後述)の研究を優先したため、保留扱いとなった。

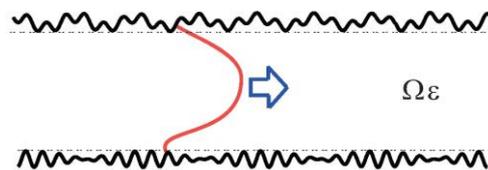
次に(2)は、ドイツの研究者2名とフランスの研究者2名の計5名で共同研究を行い、所期の成果が得られた。非等方的な拡散方程式の特異極限を扱うには、フィンズラー幾何学の理論が大変役立つ。この部分について、フランス側の研究者と何度か直接会って勉強会を開き、ドイツ側の研究者とは主としてメールや手紙で情報交換を行った。

(3)①は、台湾の J.-S. Guo 他1名と共同研究を行った。彼らがすでに得ていた研究結果に、俣野が爆発問題に関する以前の研究で用いた「組みひも群」の手法を組み合わせる

ことで、期待通りの成果が得られた。(3)②については、後述する新たな問題(3)③の研究がめざましく進展したので、そちらに差し替えた。

4. 研究成果

上記(1)①では、境界の波打ち方が周期的でなく非周期的な場合にのみ生じる virtual pinning と呼ばれる現象を発見し、詳しく解析した(論文投稿済み)。これは、進行波の平均速度が0になるという非常に特異な現象で、周期的な環境においては決して現れない。また、この研究に平行して、境界が波打つ周期を限りなく小さくしていったときの進行波の均質化極限に関する研究も行った(投稿準備中)。



(1)②は、現在研究を継続中であるが、これに先立つ関連研究が完成し、論文が学術誌に掲載された(文献[10])。これは、双安定型の拡散方程式に現れる平面進行波が、大きさが有限である障害物にぶつかったときに何が起こるかを詳細に調べた仕事である。

(1)③では、空間1次元 KPP 型進行波の速度を最大にする係数を決定する変分問題を考察し、そのような係数は関数ではなく、デルタ関数を周期的に配置した測度であることを示した(文献[5])。

また、研究開始後に加わった新しい問題として、(1)⑤Allen-Cahn 型拡散方程式に現れる平面進行波の安定性を考察し、平面進行波が大きな摂動に対して漸近安定であるかどうかを論じた(文献[8])。大きな摂動に対する漸近安定性の研究は、多次元空間の場合はこれまでなく、最初の成果と位置づけられる。概周期的な摂動も考察した。

同じく、申請時に含めていなかった新しい問題として、(1)⑥空間1次元の拡散方程式の解の漸近挙動の研究も行った。これは、無限区間 \mathbf{R} 上の半線形拡散方程式の解の漸近挙動に関するもので、有界な台をもつ非負の初期値から出発した解は時間がたつと必ず定常解に収束することを証明した(文献[6])。この問題では解の定義域が有界でなく無限区間であるため、通常のエネルギーを用いた論法が適用できず、これが解の長時間挙動の解明を難しくしていた。本研究では、零点数非増大則の新しい応用方法を編み出し、それを収束証明に役立てた。さらに同じ論文で、双安定型や燃焼モデル型の方程式を詳しく

考察し、波面の無限遠方への伝播と、解が0に収束して波面が消滅するケースを分ける閾値の性質を解明した。

次に、上記(2)のテーマについては、非等方的な拡散方程式の特異極限として現れる界面運動に関して、従前知られていた結果を大幅に改良する精密な評価が得られた(文献[4])。

上記(3)①では、強い吸収項をもつ拡散方程式を研究し、dead core(解が0となる領域)が生じる際の速さを完全に分類することができた(文献[3])。

また、申請時に含めていなかった新しい問題として、(3)③ソボレフ超臨界型熱方程式の爆発解の研究を行い、ほとんどの爆発がタイプ2ではなくタイプ1であることを証明するとともに、自己相似解のエネルギーに関する新しい不等式を導いた(文献[1])。

この他、従前からの継続研究であるが、(3)④調和写像に付随する熱流の爆発問題(文献[7])および(3)⑤ソボレフ超臨界型熱方程式の爆発解の分類と爆発後の解の挙動の総合的研究(文献[9])の仕事が完成し、学術誌に掲載された。

また、本研究では、上記(1)~(3)に含まれない新しいテーマとして、

『3次元細胞電気生理学モデル』の数学的研究を行った。これは、神経パルスの伝播などに見られる細胞の膜電位の変化を、従来の1次元モデルではなく、細胞の3次元構造を考慮した形で記述する数理モデルであり、具体的には細胞膜に対応する曲面上で定義された非線形擬微分方程式になる。従来から研究されてきたホジキン・ハクスレイ方程式系(HH系)やFitzHugh-Nagumo系も、通常は空間1次元の拡散方程式であるが(下図左)、細胞の3次元構造を考慮すれば曲面上の擬微分方程式になる(下図右)。

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + f(v, w) \\ \frac{\partial w}{\partial t} = g(v, w) \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t} = -\Lambda v + f(v, w) \\ \frac{\partial w}{\partial t} = g(v, w) \end{cases} \quad \Gamma$$

→ x 

本研究では、細胞が有限の大きさをもつ場合を考察し、「作用素の擬正值性」という新しい数学的概念を導入することにより、これまで未解決であった解の一様有界性を証明するとともに、方程式の大域アトラクターの性質を詳しく調べた(文献[2])。今後の目標として、細胞が無限柱状領域である場合を考え、その表面における神経パルス伝播の問題を研究する予定である。

以上は研究代表者の研究成果であるが、研究分担者のWeissが行った変分的手法による進行波の研究も上記(1)のテーマに密接に関連している(文献[11])。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計11件)

- ① H. Matano and F. Merle: “Threshold and generic type I behaviors for a supercritical nonlinear heat equation”, J. Functional Anal. Vol.261 (2011), 716-748 (査読有).
- ② H. Matano and Y. Mori: “Global existence and uniqueness of a three-dimensional model of cellular electrophysiology”, Discrete and Continuous Dynamical Systems, Ser. A Vol. 29 (2011), 1573--1636 (査読有).
- ③ J.-S. Guo, H. Matano and C.-C. Wu: “An application of braid group theory to the finite time dead-core rate”, J. Evolution Equations Vol.10 (2010), 835-855 (査読有).
- ④ M. Alfaro, H. Garcke, D. Hilhorst, H. Matano and R. Schaetzle: “Motion by anisotropic mean curvature as sharp interface limit of an inhomogeneous and anisotropic Allen-Cahn equation”, Proc. Royal Soc. Edinburgh, Ser. A, Vol. 140 (2010), 673-706 (査読有).
- ⑤ X. Liang, X. Lin and H. Matano: “A variational problem associated with the minimal speed of travelling waves for spatially periodic reaction-diffusion equations”, Trans. Amer. Math. Soc. Vol. 462 (2010), 5605-5633 (査読有).
- ⑥ Y. Du and H. Matano: “Convergence and sharp thresholds for propagation in nonlinear diffusion problems”, J. Eur. Math. Soc. Vol.12 (2010), 279-312 (査読有).
- ⑦ S. B. Angenent, J. Hulshof, H. Matano: “The radius of vanishing bubbles in equivariant harmonic map flow from D^2 to S^2 ”, SIAM J. Math. Anal. Vol. 41 (2009), 1121-1137 (査読有).
- ⑧ H. Matano, M. Nara and M. Taniguchi: “Stability of planar waves in the Allen-Cahn equation”, Comm. Partial Differential Equations, Vol. 34 (2009), 976-1002 (査読有).
- ⑨ H. Matano, F. Merle: “Classification of Type I and Type II behaviors for a supercritical nonlinear heat equation”, J. Funct. Anal. Vol.256 (2009), 992-1064 (査読有).
- ⑩ H. Berestycki, F. Hamel and H. Matano:

“Bistable travelling waves around an obstacle”, *Comm. Pure Appl. Math.* Vol.62 (2009), 729-788 (査読有).

- ⑪ R. Monneau and G.S. Weiss: “Pulsating traveling waves in the singular limit of a reaction-diffusion system in solid combustion”, *Ann. Inst. Henri Poincare*, Vol.26 (2009), 1207-1222 (査読有).

[学会発表] (計 17 件)

- ① 侯野 博: “Global solutions for a 3D model of cellular electrophysiology”, *Conference on Far From Equilibrium Dynamics*, 2011年1月7日, 京都大学.
- ② 侯野 博: “Front propagation in hyperbolic space”, *Conference on Interface Motion and Traveling Waves in Reaction Diffusion Equations*, 2010年10月14日, 同济大学(中国).
- ③ 侯野 博: “Comparison of the rescaled energy for supercritical nonlinear heat equations”, 爆発に関する第4回日欧会議, 2010年9月7日, ライデン大学(オランダ).
- ④ 侯野 博: “Front propagation on nonlinear diffusion equation on hyperbolic space”, *Workshop on Recent Advances on de Giorgi’s Conjecture and the Study of Entire Solutions of Nonlinear Scalar Equations*, 2010年8月9日, バンプセンター(カナダ).
- ⑤ 侯野 博: “Threshold and generic type I behaviors for a supercritical nonlinear heat equation”, *8th AIMS International Conference on Dynamical Systems, Differential Equations and Applications*, 2010年5月26日, ドレスデン工科大学(ドイツ).
- ⑥ 侯野 博: “Global solutions for a 3D model of cellular electrophysiology”, *ReadiLab Conference: Spatio-Temporal Patterns*, 2010年3月16日, Archamps 学術センター(フランス).
- ⑦ 侯野 博: “Homogenization limit of recurrent traveling waves in a 2D cylinder with saw-toothed boundary”, 非線形楕円型と放物型偏微分方程式に関する第2回日本チリ合同会議, 2009年12月5日, 明治大学.
- ⑧ 侯野 博: “Front propagation in spatially ergodic media”, *Conference on Mathematical Challenges Motivated by Multi-Phase Materials*, 2009年6月25日, Anogia 学術村(ギリシャ).

6. 研究組織

(1) 研究代表者

侯野 博 (MATANO HIROSHI)
東京大学・大学院数理科学研究科・教授
研究者番号: 40126165

(2) 研究分担者

中村 建一 (NAKAMURA KEN-ICHI)
電気通信大学・電気通信学部・助教
研究者番号: 40293120
Weiss G. S. (Weiss Georg S.)
東京大学・大学院数理科学研究科・准教授
研究者番号: 30282817