

機関番号：10101

研究種目：基盤研究 (B)

研究期間：2008 ～ 2012

課題番号：20340036

研究課題名 (和文) 代数多様体上の力学系とパンルヴェ方程式

研究課題名 (英文) Dynamics on algebraic varieties and Painleve equations

研究代表者

岩崎 克則 (IWASAKI KATSUNORI)

北海道大学・大学院理学研究院・教授

研究者番号：00176538

研究分野：微分方程式，力学系，複素幾何学

科研費の分科・細目：数学・大域解析学

キーワード：パンルヴェ方程式，力学系，リーマン・ヒルベルト対応，指標多様体，モデュライ理論，エルゴード理論，カオス，周期点

## 1. 研究計画の概要

パンルヴェ第 VI 方程式の非線型モノドロミー写像の力学系・エルゴード理論，および周期点の研究を行う。この研究は，パンルヴェ方程式のモデュライ理論的定式化と，代数多様体上の双有理写像のエルゴード理論および周期点の理論を，リーマン・ヒルベルト対応によって結びつけ，両者の有機的な統合を果たすことによって実行される。

パンルヴェ第 VI 方程式は 4 次元のアフィン・パラメータに依存し，このパラメータ空間にはアフィン・ワイル群が作用する。パラメータが，この群作用の鏡映面に乗っていない場合は，研究代表者たちの以前の研究で既に取り扱いが行われていた。本研究では，パラメータが鏡映面に乗っている，より興味深い場合を中心に考察する。この場合に，非線型モノドロミー写像のエントロピー正の確率不変測度の構成を行い，付随する力学系のカオス性について論じる。また，この場合には，モノドロミー写像の不変集合として，超幾何関数解に付随する所謂リッカチ曲線が現れる。そこで，リッカチ解軌道の近傍におけるモノドロミー写像の力学系的性質について研究する。

上記の場合には，モノドロミー写像の周期点として，周期曲線と孤立周期点の二種類が現れると考えられるので，それらの個数の評価について研究する。また，この研究に資するために，射影代数曲面上のエントロピー正の保測的雙有理写像の周期点の一般的理論の構築を行う。更に，コンパクト複素曲面上の位相的エントロピーが正の正則自己同型をできるだけたくさん構成し，その力学系理論的な性質を調べるという研究を行う。

## 2. 研究の進捗状況

(1) パンルヴェ第 VI 方程式の力学系・エルゴード理論の研究。パラメータが鏡映面上に乗っている場合について研究計画の考察を行った。この場合は，対応する指標多様体の特異点を持ちリーマン・ヒルベルト対応がその解析的特異点解消を与えるのみとなり，単射性が崩れる。そこで，指標多様体の代数的最少特異点解消をとり，リーマン・ヒルベルト対応を双正則写像に持ち上げることで，パンルヴェ方程式の非線型モノドロミーと指標多様体上の組み紐作用との間に狭義共役写像を構成した。これにより，モノドロミー写像に対する，混合的で鞍型双曲的な最大エントロピー確率不変測度を構成し，またエントロピーの計算アルゴリズムを与えることができた。

(2) パンルヴェ第 VI 方程式の不変部分集合および周期解の研究。パンルヴェ方程式の解芽全体のなすモデュライ空間の中で，非初等的な閉曲線に沿う非線型モノドロミー写像で不変な既約コンパクト部分集合は，超幾何関数解のなすリッカチ曲線 (1 次元) か孤立周期解 (0 次元) かのいずれかであることを示した。また，周期解のなす曲線，すなわち周期曲線が，リッカチ曲線に限ることを示した。一方，孤立周期解は必ず無限個あり，その個数は周期と共に指数的に増大することを示した。さらに，指数的増大率を考えている閉曲線の情報から具体的に計算するアルゴリズムを与えた。この研究結果は，次の項目 (3) の一般的理論を応用することによって得られた。

(3) 射影代数曲面上のある複素面積要素を保存する双有理写像に対する周期点の一

般的理論を構築。この研究では、写像の位相的エントロピーが正ならば、ある一般的な条件の下で、この写像はたかだか有限個の周期曲線しか持たず、その一方、必ず無限個の孤立周期点を持ち、その個数は周期と共に指数的に増大していくことを示した。ここで、この指数的増大度はエントロピーの値によって具体的に表示できる。この一般論を展開する上での困難点は、曲面上の面積保存系ではアティア・ポットの不動点公式が適用できないことであった。そこで、本研究では代わりに斎藤秀司の不動点公式を用いることにより困難を克服した。

### 3. 現在までの達成度

②おおむね順調に進展している。

パラメータが鏡映面の上に乗っている場合にパンルヴェ第 VI 方程式のエルゴード理論を展開することができた。またこの場合に、モノドロミー写像のコンパクト不変部分集合の分類ができた。特に周期曲線が高々有限個しかなく、それらはリッカチ曲線に限ることが示せた。また孤立周期解が必ず無限個存在し、その個数が周期とともに指数的に増大することを示せた。これを示すために射影曲面上の保存力学系の周期点の一般論を構築できた。以上のことは、研究計画がおおむね順調に進展していることを示している。

### 4. 今後の研究の推進方策

特別なパラメータに対応するパンルヴェ VI 型力学系の特別な解軌道について研究を行う。例えばマルコフ・パンルヴェ解軌道を記述するパラメータの値と初期値については既に決定済みであるが、この軌道の大域的性質について詳しい考察を行う。

またパンルヴェ型微分方程式を規定する基本的な性質であるパンルヴェ性について考察を進める。過去 30 年間におけるパンルヴェ系の研究は可積分系的な研究が中心であったため、パンルヴェ性の理解は殆ど進んでいない。この研究は非常に困難であるが、本質的な進展に向けての手掛かりを探る。

更にコンパクト複素曲面上の力学系について研究を行う。特に有理曲面上のエントロピー正の自己同型写像の組織的構成方法について考察を行う。

### 5. 代表的な研究成果

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 5 件)

- (1) Katsunori Iwasaki and Takato Uehara, Periodic points for area-preserving birational maps of surfaces (査読有), *Math. Z.* 266 (2010), 289—318.

- (2) Katsunori Iwasaki, On the Markov-Painleve transcendent (査読無), *RIMS Kokyuroku* 1699 (2010), 160—167.  
 (3) Katsunori Iwasaki, Monodromy of Painleve VI equation around classical special solutions (査読無), *RIMS Kokyuroku* 1662 (2009), 136—147.  
 (4) Katsunori Iwasaki, Finite branch solutions to Painleve VI around a fixed singular point(査読有), *Adv. Math.* 217 (2008), 1889—1934.  
 (5) Yutaka Ishii, Hyperbolic polynomial diffeomorphisms of  $C^2$ . I. A non-planar map (査読有), *Adv. Math.* 218 (2008), 417—464.

[学会発表] (計 9 件)

- (1) 岩崎克則, 複素曲面上の正則力学系について, 複素解析的ベクトル場・葉層構造とその周辺, 龍谷大学セミナーハウスともいき荘, 京都, 2010 年 11 月 28 日.  
 (2) Katsunori Iwasaki, Algebraic analysis of the sixth Painleve equation, 4th Workshop on Hamiltonian systems and related topics, 新潟大学サテライトキャンパス 2010 年 10 月 14, 15 日.  
 (3) 岩崎克則, 特殊関数の諸問題, 複素幾何学の諸問題, RIMS 共同研究, 京都大学数理解析研究所, 2010 年 9 月 6 日.  
 (4) 岩崎克則, パンルヴェ方程式の代数解析と力学系, 日本数学会年会総合講演, 慶應義塾大学, 横浜, 2010 年 3 月 25 日.  
 (5) Katsunori Iwasaki, A note on the Markoff-Painleve transcendent, 複素力学系とその関連分野の総合的研究, RIMS 研究集会, 京都大学人間環境研究科, 京都, 2009 年 12 月 18 日.  
 (6) 岩崎克則, パンルヴェ方程式のモノドロミーとその力学系, 微分方程式のモノドロミーをめぐる諸問題, 京都大学数理解析研究所, 京都, 2009 年 2 月 5 日.  
 (7) Katsunori Iwasaki, Periodic solutions to Painleve VI, Journees Franco-Japonaises en honneur de Kazuo Okamoto: autour de Equations de Painleve, IRMA, Universite Louis Pasteur, Strasbourg, France, 08-13, November, 2008.  
 (8) 岩崎克則, パンルヴェ方程式の幾何学, 第 55 回幾何学シンポジウム, 弘前大学, 弘前, 2008 年 8 月 25 日.  
 (9) Katsunori Iwasaki, Painleve VI: from algebraic geometry to elementary geometry, International Conference "From Painleve to Okamoto", 東京大学大学院数理科学研究科, 東京, 2008 年 6 月 12 日.