

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成 25 年 5 月 21 日現在

機関番号：10101

研究種目：基盤研究（B）

研究期間：2008 ～ 2012

課題番号：20340036

研究課題名（和文） 代数多様体上の力学系とパンルヴェ方程式

研究課題名（英文） Dynamics on algebraic varieties and Painleve equations

研究代表者

岩崎 克則（IWASAKI KATSUNORI）

北海道大学・大学院理学研究院・教授

研究者番号：00176538

研究成果の概要（和文）：先行研究で確立したパンルヴェ系の代数幾何学・モジュライ理論的な基盤整備の下に、パンルヴェ第 VI 方程式の詳細な力学系的研究を実行した。パラメータがアフィン・ワイル群の壁にある場合に、非線型モノドロミー写像のカオス性、孤立周期解の個数の指数的大増大性等を確立した。この結果を得るために、射影代数曲面上の保測的雙有理写像の周期点の一般的理論を確立した。また正のエントロピーを持つ有理曲面自己同型の構成も行った。

研究成果の概要（英文）：We developed a dynamical study of the sixth Painleve equation on the algebro-geometrical and moduli theoretical foundations of the Painleve system. When the parameter lies on the walls of an affine Weyl group, we established the chaotic nature of the system and proved the exponential growth of the number of isolated periodic solutions. To obtain these results, we developed a general theory of periodic points for area-preserving birational maps on a projective surface. Constructing rational surface automorphisms of positive entropy has also been discussed.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合計
2008 年度	2,200,000	660,000	2,860,000
2009 年度	1,900,000	570,000	2,470,000
2010 年度	2,000,000	600,000	2,600,000
2011 年度	1,900,000	570,000	2,470,000
2012 年度	1,900,000	570,000	2,470,000
総計	9,900,000	2,970,000	12,870,000

研究分野：微分方程式，力学系，複素幾何学

科研費の分科・細目：数学・大域解析学

キーワード：パンルヴェ方程式，力学系，リーマン・ヒルベルト対応，指標多様体，モジュライ空間，エルゴード理論，カオス，周期点

1. 研究開始当初の背景

研究代表者は、先行する科学研究費補助金基盤研究（B）「パンルヴェ方程式の幾何学と大域解析」（平成 16 年度～19 年度）において、本研究課題につながる研究を行った。すなわち、パンルヴェ方程式やその一般化に対する代数幾何学・モジュライ理論的な基盤

整備を行い、またその成果を代数曲面上の複素力学系理論およびエルゴード理論と組み合わせることによって、パンルヴェ型方程式の力学系理論的研究を創始した。具体的には、
（1）相空間の代数幾何学的構成：ガルニエ系の相空間を安定放物接続のモジュライ空間として幾何学的不変式論を用いて構成し

た。またその自然なコンパクト化を構成した。特にパンルヴェ第 VI 方程式の場合に、モデュライ空間の精密な記述を行った。

(2) リーマン・ヒルベルト対応の確立：上記のモデュライ空間に対してリーマン・ヒルベルト問題を完全な形で解き、リーマン・ヒルベルト対応を確立した。

(3) ベックルト変換の特徴づけ：パンルヴェ方程式の対称性を記述するベックルト変換群をリーマン・ヒルベルト対応に関する被覆変換群として特徴づけ、そのアフィン・ワイル群構造の由来を発見した。

(4) 古典解と特異点理論：リーマン・ヒルベルト対応は安定放物接続のモデュライ空間から指標多様体への正則写像であるが、これが指標多様体上の特異点の最小特異点解消を与えることを示した。そして、その例外集合がパンルヴェ方程式の古典解（超幾何関数解）を与えることを示し、パンルヴェ系が超幾何系の非線形化であることの幾何学的理由を明らかにした。

(5) パンルヴェ方程式のエルゴード理論の創始：パンルヴェ第 VI 方程式の非線形モノドロミーの複素力学系及びエルゴード理論的な研究を開始した。パラメータが壁 (wall) 上にないときに、非線形モノドロミーが殆んど全てのループに沿ってカオス的であることを示した。これは従来可積分系に研究されてきたパンルヴェ方程式が、実はカオス的であったことを初めて示したものであり、本研究課題の背景をなしている。

2. 研究の目的

本研究課題では、上記の研究開始当初の背景を基盤として、パンルヴェ第 VI 方程式の力学系の研究、定性理論の研究を詳細な水準で行うことが、まず一つの目的であった。

(1) パンルヴェ第 VI 方程式の力学系・エルゴード理論の研究：この方程式は4次元の複素アフィン・パラメータに依存しているが、このパラメータ空間にはアフィン・ワイル群が作用している。パラメータが、この作用に関する壁 (wall) に乗っていないときは、ものごとは比較的単純であり、上述の先行研究において一定の成果が得られていた。本件研究課題においては、パラメータが壁上にあるときにパンルヴェ力学系の諸現象を十分に解明することであった。

(2) パンルヴェ第 VI 方程式の不変部分集合、周期解、代数関数解の研究：パンルヴェ力学系の相空間に働く非線形モノドロミーの力学系には、種々の興味深い不変部分集合が存在し、その構造を理解することは重要である。(あるいはそのような不変部分集合が存在しないという逆の結果を出すことも重要である。) その中で古典解（超幾何解）に対応する不変集合、あるループに沿う周期解

のなす不変集合、代数関数解のなす不変集合などが特に興味深い。パラメータが壁上にあるとき、これらの問題が更に面白くなるので、それらを解くことがここでの課題であった。

上記の周期解の問題を解くためには、ある種の一般論の構築が必要となる。それが次の項目の目的であった。

(3) 射影代数曲面上の保測的雙有理写像に対する周期点の理論の構築：保測（保存）力学系の周期点の分布理論には特有の困難がある。すなわち周期曲線等の孤立しない周期点が現れるときの、孤立周期点の個数の数え上げ問題である。それを克服するのがここでの課題であった。

(4) 有理曲面上のエントロピー正の自己同型の研究：パンルヴェ力学系の研究は、代数多様体上の力学系理論を下敷きに行っているが、ここでの課題は、有理曲面上の力学系の理論を発展させることにあった。特にエントロピー正の力学系を数多く構成することが目的であった。

(5) 多面体調和関数の研究：本研究課題の主要目的と直接の関係はないが、鏡映群の代数解析と組合せ論を用いて、多面体調和関数について研究することも目的においた。

3. 研究の方法

研究代表者は、本研究課題の立案・実施・総括の中心となった。分担者の上原崇人は最も主要な共同研究者として、パンルヴェ方程式の力学系理論および射影代数曲面上の周期点理論の開発に協力した。上原はまた、有理曲面上のエントロピー正の自己同型の構成問題において主要な役割を果たした。パンルヴェ VI 方程式の代数関数解、マルコフ・パンルヴェ超越関数、および多面体調和関数の研究は、代表者の単独研究であった。

2010年3月の日本数学会年会で「パンルヴェ方程式の代数解析と力学系」と題して総合講演する機会を与えられた。この講演では、本研究課題のそれまでの研究成果について、広範囲の聴衆に紹介することができた。2011年には「パンルヴェ性をめぐって」と題する記事をまとめた。これは、パンルヴェ方程式研究の現況をまとめた上で、今後の研究の方向性を与えるような未解決問題を多く収録した。これは、その後および将来の研究活動に役立っている。

我々のパンルヴェ系の研究に適用する力学系理論、エルゴード理論については、もともとこれらの分野の専門家ではない研究代表者は、九州大学力学系セミナー等で研究分担者あるいは連携研究者から専門的知識の供与を受けた。パンルヴェ系は、可積分系とも関連が深いので、可積分系セミナーにおいても必要な関連情報を仕入れた。

また、京都大学数理解析研究所で開かれて

いる、パンルヴェ方程式、複素力学系、代数解析、代数幾何学等の研究集会、および、例年、夏休みに開かれている函数方程式サマーセミナー、神戸大学で開かれている超幾何方程式研究会、熊本大学等で開かれているアクセサリーパラメータ研究会等に出席し、研究連絡や研究成果発表を行った。

4. 研究成果

(1) パンルヴェ第 VI 方程式の力学系・エルゴード理論の研究。パラメータが鏡映面 (wall) 上に乗っている場合について研究計画の考察を行った。この場合は、対応する指標多様体の特異点を持ちリーマン・ヒルベルト対応がその解析的特異点解消を与えるのみとなり、単射性が崩れる。そこで、指標多様体の代数的最少特異点解消をとり、リーマン・ヒルベルト対応を双正則写像に持ち上げることにより、パンルヴェ方程式の非線型モノドロミーと指標多様体上の組み紐作用との間に狭義共役写像を構成した。これにより、モノドロミー写像に対する、混合的で鞍型双曲的な最大エントロピー確率不変測度を構成し、またエントロピーの計算アルゴリズムを与えることができた。

(2) パンルヴェ第 VI 方程式の不変部分集合、周期解、代数関数解の研究。パンルヴェ方程式の解芽全体のなすモジュライ空間の中で、非初等的な閉曲線に沿う非線型モノドロミー写像で不変な既約コンパクト部分集合は、超幾何関数解のなすリッカチ曲線 (1次元) か孤立周期解 (0次元) かのいずれかであることを示した。また、周期解のなす曲線、すなわち周期曲線が、リッカチ曲線に限ることを示した。一方、孤立周期解は必ず無限個あり、その個数は周期と共に指数的に増大することを示した。さらに、指数的増大率を考えている閉曲線の情報から具体的に計算するアルゴリズムを与えた。この研究結果は、次の項目 (3) の一般的理論を応用することによって得られた。更にあるクラスの代数関数解を、指標多様体上の力学系の有限軌道の観点から特徴付けた。

(3) 射影代数曲面上の保測的雙有理写像に対する周期点の理論の構築。射影代数曲面上の雙有理写像で、有理二次形式を保存するものに対する周期点の一般論を構築した。そのような写像は、位相的エントロピーが正ならば、ある一般的な条件のもとで、高々有限個の周期曲線しか持たず、また無限個の孤立周期点を持ち、後者の個数は周期とともに指数的に増大することを示した。ここで、この指数的増大度は、エントロピーの値によって具体的に表示することができる。この一般論を展開する上での困難点は、曲面上の面積保存系ではアティア・ボットの公式が適用できないことであった。本研究では、斎藤秀司の不

動点公式を使うことによって、その難点を克服した。この成果は項目 (2) のパンルヴェ方程式の周期解の研究に応用された。

(4) 有理曲面上のエントロピー正の自己同型の研究。有理曲面上のエントロピー正の自己同型写像の研究を行った。昨年度の研究において、軌道データの実現化を用いた写像構成方法を導入し、尖点をもつ反標準曲線を保つ写像の大量構成に成功した。本年度は、その逆の問題、つまり、任意の尖点反標準曲線を保つ自己同型写像が適当な軌道データの実現化から構成できることを示した。つまり、軌道データの実現化を用いた構成方法の有用性を示した。

(5) 多面体調和関数の研究。多面体調和関数論の一般論は、研究代表者の以前の研究により構築された (1997)。その研究に基づき、正多面体に対する多面体調和関数の空間の決定が行われたが、立方体の場合のみ未解決のまま残されていた。そこで、 n 次元立方体の k 次元骨格に関する調和関数の空間を決定した。この問題を有限鏡映群のある不変偏微分方程式系の解析に還元し、更にヤング図形上のある和公式やベルヌーイ数が絡むある漸化式の組合せ論に帰着して解いた。歴史的には、 $k=0$ の場合は 1970 年に解決されていたが、 $k=1, \dots, n$ の場合が未解決であった。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 10 件)

- ① K. Iwasaki and T. Uehara, Isolated periodic solutions to Painleve VI equation, RIMS Kokyuroku Bessatsu **37** (2013), 69--79. 査読あり
- ② K. Iwasaki, On algebraic solutions to Painleve VI, RIMS Kokyuroku Bessatsu **37** (2013), 49--67. 査読あり
- ③ K. Iwasaki, Cubic harmonics and Bernoulli numbers, Journal of Combinatorial Theory, Series A, **119** (2012), no. 6, 1216--1234. 査読あり
- ④ K. Iwasaki, 特殊関数の問題 -- パンルヴェ性をめぐって、複素幾何学の諸問題、京都大学数理解析研究所講究録 **1731** (2011), 1--13. 査読なし
- ⑤ T. Uehara, Dynamics on Rational Surfaces, 京都大学数理解析研究所講究録 **1765** (2011), 137--153. 査読なし
- ⑥ 岩崎克則, パンルヴェ方程式の代数解析と力学系, 2010 年度日本数学会年会総合講演・企画特別講演予稿集 (2010), 17--32. 査読なし
- ⑦ K. Iwasaki, On the Markoff-Painleve transcendent, 複素力学系とその関連分

野の総合的研究, 京都大学数理解析研究所講究録 1699 (2010), 160--167.

- ⑧ K. Iwasaki and T. Uehara, Periodic points for area-preserving birational maps of surfaces, *Mathematische Zeitschrift* **266** (2010), no. 2, 289--318. 査読あり
- ⑨ K. Iwasaki, Monodromy of Painleve VI equation around classical special solutions, 微分方程式のモノドロミーをめぐる諸問題, 京都大学数理解析研究所講究録 1662 (2009), 136--147. 査読なし
- ⑩ K. Iwasaki, Finite branch solutions to Painleve VI around a fixed singular point, *Advances in Mathematics* **217** (2008), no. 5, 1889--1934. 査読あり

[学会発表] (計 39 件)

- ① 岩崎克則, 超幾何とサイン・サイン, 超幾何方程式研究会 2013, 神戸大学瀧川記念学術交流会館, 神戸, 2013 年 1 月 5 日.
- ② 上原崇人, Dynamics of rational surface automorphisms, 代数幾何セミナー, 埼玉大学, さいたま, 2012 年 12 月 19 日.
- ③ T. Uehara, Siegel disks on rational surfaces, *New Developments in Complex Dynamical Systems*, 京都大学数理解析研究所, 京都, 2012 年 12 月 13 日.
- ④ T. Uehara, The entropy values of automorphisms on rational surfaces, *Various Aspects on the Painleve Equations*, 京都大学数理解析研究所, 京都, 2012 年 11 月 30 日.
- ⑤ 岩崎克則, 超幾何の超幾何性, 琉球超幾何セミナー, 琉球大学理学部, 沖縄, 2012 年 11 月 21 日.
- ⑥ 上原崇人, Construction of automorphisms on rational surfaces, 第 10 回アフィン代数幾何学研究集会, 関西学院大学, 大阪, 2012 年 9 月 6 日.
- ⑦ T. Uehara, On automorphisms of rational surfaces, *Korea-Japan Joint Conference in Algebraic Geometry*, Ritz Plaza Hotel, Gunsan, 2012 年 8 月 20 日.
- ⑧ 岩崎克則, 蓮井美希, 多面体と関数方程式, 函数方程式サマーセミナー 2012, KKR 蔵王白銀荘, 山形, 2012 年 8 月 7 日.
- ⑨ T. Uehara, Constructing automorphisms of rational surfaces, *Interactions between continuous and discrete holomorphic dynamical systems*, Banff International Research Station, Banff, Canada, 2012 年 7 月 10 日.
- ⑩ 上原崇人, 有理曲面上の自己同型写像, 金沢大学第 10 回ハミルトン力学系セミナー, 金沢大学, 金沢, 2012 年 6 月 29 日.
- ⑪ 上原崇人, Entropy values of rational surface automorphisms, 東北大学大学院理学研究科数学専攻談話会, 東北大学, 仙台, 2012 年 6 月 18 日.
- ⑫ 上原崇人, 有理曲面上の自己同型写像のエントロピーについて, 第 9 回数理解情報セミナー, 新潟大学, 新潟, 2012 年 4 月 20 日.
- ⑬ 上原崇人, Rational surface の自己同型写像について, 九州代数幾何若手勉強会, 九州大学, 福岡, 2012 年 3 月 14 日.
- ⑭ 上原崇人, On rational surface automorphisms, 複素力学系の総合的研究, 京都大学数理解析研究所, 京都, 2012 年 1 月 25 日..
- ⑮ 岩崎克則, 立方体とベルヌーイ数, 超幾何方程式研究会 2012, 神戸大学瀧川記念学術交流会館, 神戸, 2012 年 1 月 7 日.
- ⑯ T. Uehara, Rational surface automorphisms preserving cuspidal anticanonical curves, *Automorphisms of Algebraic Varieties - Dynamics and Arithmetic*, 白浜, 2012 年 12 月 20 日.
- ⑰ 上原崇人, 有理曲面上の自己同型写像について, 幾何コロキウム, 北海道大学, 札幌, 2011 年 11 月 9 日.
- ⑱ 上原崇人, 尖点をもつ反標準曲線を保つ自己同型写像について, 幾何セミナー, 東北大学, 仙台, 2011 年 10 月 4 日.
- ⑲ 岩崎克則, パンルヴェ性をめぐって, アクセサリー・パラメーター研究会, 熊本大学理学部, 2011 年 3 月 17 日.
- ⑳ 岩崎克則, 複素曲面上の正則力学系について, 複素解析的ベクトル場・葉層構造とその周辺, 龍谷大学セミナーハウスともいき荘, 京都, 2010 年 1 月 28 日.
- 21 岩崎克則, パンルヴェ方程式の力学系, *Dynamics of Complex Systems* セミナー, 北海道大学大学院理学研究院, 札幌, 2010 年 11 月 17 日.
- 22 岩崎克則, 複素曲面上の正則力学系について, 東北大学幾何セミナー, 東北大学大学院理学研究科, 仙台, 2010 年 10 月 19 日.
- 23 K. Iwasaki, Dynamics of the sixth Painleve equation, 4th Workshop on Hamiltonian systems and related topics, Niigata University Satellite Campus "Tokimeito", Niigata, 2010 年 10 月 15 日.
- 24 K. Iwasaki, Algebraic analysis of the sixth Painleve equation, 4th Workshop

- on Hamiltonian systems and related topics, Niigata University Satellite Campus "Tokimeito", Niigata, 2010年10月14日.
- 25 岩崎克則, 特殊関数の諸問題, 複素幾何学の諸問題, RIMS 共同研究, 京都大学数理解析研究所, 2010年9月6日.
- 26 岩崎克則, Painleve VI 方程式のある特殊解について, 函数方程式論ワークショップ, 東京大学大学院数理科学研究科, 東京, 2010年7月26日.
- 27 岩崎克則, パンルヴェ方程式の代数解析と力学系, 北海道大学談話会, 北海道大学理学研究院, 札幌, 2010年5月20日.
- 28 岩崎克則, パンルヴェ方程式の代数解析と力学系, 日本数学会年会総合講演, 慶應義塾大学, 横浜, 2010年3月25日.
- 29 K. Iwasaki, A note on the Markoff Painleve transcendent, 複素力学系とその関連分野の総合的研究, RIMS 研究集会, 京都大学人間環境研究科, 2009年12月18日.
- 30 岩崎克則, Smale in Painleve around Gauss, 筑波大学解析セミナー, 筑波大学, 2009年10月28日.
- 31 岩崎克則, Smale in Painleve around Gauss, 2009年度函数方程式サマーセミナー, 簡保の宿鳥羽, 鳥羽, 2009年8月1日.
- 32 岩崎克則, パンルヴェ方程式のモノドロミーとその力学系, 微分方程式のモノドロミーをめぐる諸問題, 京都大学数理解析研究所, 京都, 2009年2月5日.
- 33 K. Iwasaki, Periodic solutions to Painleve VI, Journees Franco Japonaises en honneur de Kazuo Okamoto: autour de Equations de Painleve, IRMA, Universite Louis Pasteur, Strasbourg, France, 2008年11月8-13日.
- 34 岩崎克則, パンルヴェ方程式と複素力学系, 複素解析幾何セミナー, 東京大学大学院数理科学研究科, 東京, 2008年10月20日.
- 35 岩崎克則, パンルヴェ方程式の幾何学, 第55回幾何学シンポジウム, 弘前大学, 弘前, 2008年8月25日.
- 36 岩崎克則, パンルヴェ第VI方程式の代数解について, 函数方程式論サマーセミナー, 白樺ハイツ, 富山市亀谷, 2008年8月8日.
- 37 岩崎克則, 指標多様体上の有限軌道とパンルヴェ VI の代数解, 微分ガロア理論・モノドロミー保存変形・パンルヴェ方程式, 神戸大学大学院理学研究科, 神戸, 2008年7月23日.
- 38 K. Iwasaki, Painleve VI: from algebraic geometry to elementary geometry, International Conference "From Painleve to Okamoto", 東京大学大学院数理科学研究科, 東京, 2008年6月12日.
- 39 K. Iwasaki, Finite orbits on character varieties and algebraic solutions to Painleve VI, 完全 WKB 解析と超局所解析, 京都大学数理解析研究所, 2008年5月29日.
6. 研究組織
- (1) 研究代表者
岩崎 克則 (IWASAKI KATSUNORI)
北海道大学・大学院理学研究院・教授
研究者番号: 00176538
- (2) 研究分担者
上原 崇人 (UEHARA TAKATO)
新潟大学・自然科学系・助教
研究者番号: 40613261
(H20→H21: 研究協力者)
- (3) 連携研究者
梶原 健司 (KAJIWARA KENJI)
九州大学・MI 研究所・教授
研究者番号: 40268115
(H20→H21: 研究分担者)
- 神本 丈 (KAMIMOTO JOE)
九州大学・大学院数理学研究院・准教授
研究者番号: 90301374
(H20→H21: 研究分担者)
- 辻井 正人 (TSUJII MASATO)
九州大学・大学院数理学研究院・教授
研究者番号: 20251598
(H20: 研究分担者)
- 石井 豊 (ISHII YUTAKA)
九州大学・大学院数理学研究院・准教授
研究者番号: 20304727
(H20: 研究分担者)
- 津田 照久 (TSUDA TERUHISA)
一橋大学・大学院経済学研究科・准教授
研究者番号: 00452730
(H20: 研究分担者)