

機関番号：10104

研究種目：基盤研究(C)

研究期間：2008～2010

課題番号：20500249

研究課題名(和文) 共分散等を対象とした行動計量手法における漸近理論の応用

研究課題名(英文) Applications of asymptotic theory to statistics such as covariances used in behaviormetrics

研究代表者

小笠原 春彦 (OGASAWARA HARUHIKO)

小樽商科大学・商学部・教授

研究者番号：70271731

研究成果の概要(和文)： 行動計量とは1970年代頃から用いられるようになった言葉で、行動計量学会の誕生に由来する。広義の行動科学(心理学、教育学、経営学、健康科学等)における計量的方法のことである。共分散は統計学の用語で2つの変数間の関連の指標である。現実には限られたデータから求められるので、真の値を推測するためにはその確率に基づくばらつき(分布)を合わせて考えなければならない。この研究では漸近理論という数理統計学の理論を用いて、共分散等に関連する各種指標のより正確な分布の導出を行った。

研究成果の概要(英文)： Behaviormetrics is a technical term which has been used since 1970's as the advent of The Behaviormetric Society of Japan. The term indicates the quantitative methods used in the behavioral and social sciences including psychology, education, management and health sciences etc. The term covariance is an index in statistics corresponding to the strength of association between two variables. Since in practice, covariances are available only from finite samples, the values of observed covariances are subject to sampling variation. In this study, approximations of the distributions, which are more accurate than those used so far, for the sample indices like covariances, are derived using asymptotic theory developed in mathematical statistics.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2008年度	1,200,000	360,000	1,560,000
2009年度	1,000,000	300,000	1,300,000
2010年度	1,100,000	330,000	1,430,000
総計	3,300,000	990,000	4,290,000

研究分野：統計学

科研費の分科・細目：情報学・統計科学

キーワード：行動計量学、漸近展開

## 1. 研究開始当初の背景

行動計量分析においては主に量的データの関連性の指標として共分散あるいは相関係数がよく用いられる。相関係数のようにそのまま分析に用いるものもあれば、共分散構造分析の場合のように標本分散共分散(標本相関係数)をデータにして繰り返し計算によりモデルにおけるパラメータの推定量を

求めるものもある。いずれの場合も推定量は標本分散共分散の関数である。平均にも構造を設定した場合は、推定量は標本平均の関数でもある。推定値の大きさを評価するためにはその分布が必要となるが、これまではサンプルのサイズが大のときに推定量が漸近的に正規分布するという段階までの漸近理論の利用が多かった。

## 2. 研究の目的

行動計量分析において、より正確な分布を得るためには、エッジワース展開等の漸近展開の方法が有用である。そこで、漸近展開を共分散や相関係数を扱った各種の多変量解析の分析法において適用する。

## 3. 研究の方法

数理統計学における漸近理論の知見に基づく。

## 4. 研究成果

### (1) クロス共分散（相関）行列の特異値分解における漸近展開

非正規分布データにおいて、非対称の共分散及び相関行列の標本特異値と特異ベクトルの分布の漸近キュムラントを導出した。これらの漸近キュムラントは  $O(1/n)$  までのエッジワース展開と変数変換を含むホルの方法による推定量の分布の近似を得るために用いられた。また、ステューデント化された統計量についても漸近展開が得られた。この方法の応用としてインターバタリー因子分析モデルにおけるパラメータの推定量の分布の漸近展開を求めた。特異値と特異ベクトルを因子分析モデルモデルの文脈で解釈し、因子の分布に関するある条件の下で、非正規分布データにおける標本特異値と特異ベクトルの分布の正規理論による下位のキュムラントの漸近頑健性が示された。

### (2) 平均及び共分散構造分析における漸近展開

平均及び共分散構造におけるパラメータの推定量の分布の漸近展開を求めた。パラメータは観測変量の平均と共分散に共通に含まれるか一方のみに（独自に）含まれる場合を扱う。平均はこれらの共通または独自のパラメータによって構造化されている場合が含まれる。最初に、母集団漸近標準誤差によって標準化されたパラメータの推定量の分布について初項のみと次の項までのエッジワース展開を与えた。現実には漸近的に分布の種類に依存しない標準誤差によってステューデント化された推定量（枢軸統計量）が関心の対象となる。そこで、枢軸統計量の漸近分布をコーニッシュフィッシャー展開により求めた。非零の因子平均をもつ因子分析モデルを用いてシミュレーションを行い、有限なサイズの標本における漸近展開の近似の正確さを調べた。

### (3) 行動科学における信頼性推定量の分布の漸近展開

#### ①最大信頼性

探索的因子分析モデルに基づく合成変量

の信頼性の4種の推定量と合成変量の最大信頼性の5種の推定量が示された。因子分析モデルのパラメータをウィッシュート最大尤度により推定した場合は最大信頼性の5種の推定量は同一となることが示された。推定量と対数をとった推定量の漸近キュムラントを任意の分布の下でモデルの誤特定を考慮して導出した。モデルが真でない場合はモデルの誤特定を考慮した理論値は誤特定を無視した場合よりもシミュレーションの値に近いことが示された。変数変換を用いたホルの方法および正規近似の方法による信頼区間のシミュレーションの結果が示された。

#### ② 層化信頼性

ガットマンとクロンバックによる信頼性係数のうち、ラムダ3(アルファ)、ラムダ2、ラムダ6について変数の層別に基づく変形版を構成した。このうちひとつはすでに層化アルファ係数として得られている。当論文で扱った4種の層化係数のうち2つは層に付随する真の得点がある場合に意味があり、他の2つは層内の誤差に相関がある場合に意味があるものである。一部の信頼性係数についてそれらが真の信頼性に等しくなる条件を求めた。信頼性あるいは層化信頼性の推定量の標本分布の近似のために、非正規分布下における分布の漸近展開が得られた。また、有限な標本における漸近展開の正確さを調べるためにシミュレーションを行った。

### (4) 共分散構造分析におけるモデルの適合指標の分布の漸近展開

共分散構造分析のモデルの適合指標のうち実際場面で用いられている13個の指標について標本分布の漸近展開を求めた。これらの指標には仮定したモデルに対する通常尤度比統計量とその関数及び無相関観測変数のいわゆるベースラインモデルの尤度比統計量の関数が含まれる。漸近展開の結果は固定対立仮説と非正規分布の下で2項エッジワース展開によって得られた。モデルの誤特定を含む1因子の因子分析モデルを用いた数値例により有限な標本のサイズの下で漸近的な結果の振る舞いが示された。

### (5) 漸近的に分布の種類に依存しないカイ2乗統計量の帰無分布の漸近展開

一般的な共分散構造に関して、漸近的に分布の種類に依存しないカイ2乗統計量の帰無分布の漸近展開を非正規分布の下で求めた。同統計量の確率密度の高次の近似のための追加の項は異なる自由度を持つカイ2乗分布の確率密度の重み付の和より得られた。一方、対応するパートレット修正はこの漸近展開を用いずに導出した。固定対立仮説の下

では標準化したカイ 2 乗統計量の分布のエッジワース展開を  $O(1/n)$  の次数まで求めた。カイ 2 乗統計量の漸近展開の途中の結果より、帰無分布及び固定対立仮説下の分布の両者についてパラメータの推定量の同時分布の漸近展開を得た。

(6) 標本四分相関係数の分布の漸近展開

四分表の標本割合に基づく四分相関係数を含むパラメータの推定量の正確な分布を周辺の割合が 0 のときの推定量の定義を与えた上で導出した。さらに母集団漸近標準誤差で標準化したパラメータの分布の漸近展開を  $O(1/n)$  まで求めた。また、ステューデント化した推定量については通常の正規近似の次の項までの分布の漸近展開を行った。漸近展開に基づく推定量の分布は正確な分布に比べて格段に短い計算時間で得られた。数値例からはフィッシャーの  $z$  変換を行った四分相関係数の推定量の長所が示唆された。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 14 件)

- (1) Ogasawara, H. (2010a). Accurate distribution and its asymptotic expansion for the tetrachoric correlation coefficient. *Journal of Multivariate Analysis*, 101, 936-948. 査読有
- (2) Ogasawara, H. (2010b). Asymptotic expansions for the pivots using log-likelihood derivatives with an application in item response theory. *Journal of Multivariate Analysis*, 101, 2149-2167. 査読有
- (3) Ogasawara, H. (2009a). Asymptotic cumulants of the parameter estimators in item response theory. *Computational Statistics*, 24, 313-331. 査読有
- (4) Ogasawara, H. (2009b). Asymptotic expansions of the distributions of the chi-square statistic based on the asymptotically distribution-free theory in covariance structures. *Journal of Statistical Planning and Inference*, 139, 3246-3261. 査読有
- (5) Ogasawara, H. (2009c). Asymptotic expansions in mean and covariance structure analysis. *Journal of Multivariate Analysis*, 100, 902-919. 査読有
- (6) Ogasawara, H. (2009d). On the estimators of model-based and maximal reliability. *Journal of Multivariate Analysis*, 100, 1232-1244. 査読有
- (7) Ogasawara, H. (2009e). Stratified coefficients of reliability and their sampling behavior under nonnormality. *Behaviormetrika*, 36, 49-73. 査読有
- (8) Ogasawara, H. (2009f). Asymptotic expansions in the singular value decomposition for cross covariance and correlation under nonnormality. *Annals of the Institute of Statistical Mathematics*, 61, 995-1017. 査読有
- (9) Ogasawara, H. (2009g). Two-term Edgeworth expansions of the distributions of fit indexes under fixed alternatives in covariance structure models. *Economic Review (Otaru University of Commerce)*, 59 (4), 41-48. 査読無
- (10) Ogasawara, H. (2008a). Asymptotic expansion in reduced rank regression under normality and nonnormality. *Communications in Statistics - Theory and Methods*, 37, 1051-1070. 査読有
- (11) Ogasawara, H. (2008b). Higher-order asymptotic cumulants of Studentized estimators in covariance structures. *Communications in Statistics - Simulation and Computation*, 37, 945-961. 査読有
- (12) Ogasawara, H. (2008c). Asymptotic expansions of the distribution of the estimator for the generalized partial correlation under nonnormality. *Behaviormetrika*, 35, 15-33. 査読有
- (13) Ogasawara, H. (2008d). Some properties of the pivotal statistic based on the asymptotically distribution-free theory in structural equation modeling. *Communications in Statistics - Simulation and Computation*, 37, 1931-1947. 査読有
- (14) Ogasawara, H. (2008e). Inverse transformation of Hall's method back to Edgeworth type expansions: An expository note. In K. Shigemasu, A. Okada, T. Imaizumi, & T. Hoshino (Eds.), *New trends in psychometrics* (pp. 365-370). Tokyo: Universal Academy Press. 査読有

[学会発表] (計 20 件)

- (1) Ogasawara, H. (2010, December 7). Asymptotic expansions of the distributions of the ADF chi-square statistic in covariance structures under nonnormality. Australian

- Statistical Conference (ASC2010), Fremantle, Australia.
- (2) Ogasawara, H. (2010, July 28). Asymptotic expansions in multi-group analysis of moment structures with an application to linearized estimators. International Conference on Trends and Perspectives in Linear Statistical Inference (LINSTAT2010), Tomar, Portugal.
  - (3) Ogasawara, H. (2010, August 24). Asymptotic expansions for the tetrachoric correlation coefficient. The 19th International Conference on Computational Statistics, Paris, France.
  - (4) 小笠原 春彦 (2010年9月6日). 多グループモーメント構造における漸近展開と線形化推定量への応用, 日本統計学会第78回大会, 早稲田大学早稲田キャンパス
  - (5) 小笠原 春彦 (2010年9月20日). 共分散構造モデルにおける固定対立仮説の下での適合指標の分布の2項エッジワース展開, 日本心理学会第74回大会, 大阪大学豊中キャンパス
  - (6) Ogasawara, H. (2010, December \*\*\*). Asymptotic expansions of the distributions of the ADF chi-square statistic in covariance structures under nonnormality, Australian Statistical Conference (ASC2010), Fremantle, Australia.
  - (7) Ogasawara, H. (2009, March 17). Asymptotic cumulants of the parameter estimators in item response theory. The 11th Biennial Conference of the International Federation of Classification Societies, Dresden, Germany.
  - (8) Ogasawara, H. (2009, July 8). Applications of asymptotic expansion in item response theory linking. The 11th European Congress of Psychology, Oslo, Norway.
  - (9) 小笠原 春彦 (2009年8月5日). 項目反応理論におけるパラメータの推定量の分布の漸近展開, 日本行動計量学会第37回大会, 大分大学医学部
  - (10) Ogasawara, H. (2009, August 18). Two-term Edgeworth expansions of the distributions of fit indexes under fixed alternatives in covariance structure models. The 57th Session of the International Statistical Institute, Durban, South Africa.
  - (11) 小笠原 春彦 (2009年8月28日). 項目反応理論における標本リンク係数の分布の漸近展開, 日本心理学会第73回大会, 立命館大学衣笠キャンパス
  - (12) 小笠原 春彦 (2009年9月8日). 共分散構造における ADF カイ2乗統計量の分布に関する非正規分布の下での漸近展開, 日本統計学会第77回大会, 同志社大学京田辺キャンパス
  - (13) 小笠原 春彦 (2009年12月4日). 四分相関係数の分布に関する漸近展開, 科研費シンポジウム (研究代表者 谷口正信 (早稲田大学)) 「多変量モデル・時系列モデルにおける統計的推測の理論と応用」主催者 近藤正男・種市信裕 (鹿児島大学), 鹿児島大学理学部
  - (14) Ogasawara, H. (2008, June 22). On the estimators of model-based and maximal reliability. The 13th International Summer Conference on Probability and Statistics, Sozopol, Bulgaria.
  - (15) Ogasawara, H. (2008, August 6). Asymptotic expansions in mean and covariance structure analysis. Joint Statistical Meetings, Denver, USA.
  - (16) Ogasawara, H. (2008, August 26). Stability of the pivotal statistic based on the asymptotically distribution-free theory in structural equation modeling. The 18th International Conference on Computational Statistics, Porto, Portugal.
  - (17) 小笠原 春彦 (2008年9月3日). モデルに基づく信頼性及び最大信頼性の漸近標本分布, 日本行動計量学会第36回大会, 成蹊大学理工学部
  - (18) Ogasawara, H. (2008, September 8). Asymptotic expansions of the null distributions of fit indexes for general covariance structures under nonnormality. The 76th annual meeting of Japan Statistical Society, Keio University, Yagami, Yokohama, Japan.
  - (19) 小笠原 春彦 (2008年9月20日). 平均及び共分散構造分析におけるパラメータの推定量に関する分布の漸近展開, 日本心理学会第72回大会, 北海道大学
  - (20) Ogasawara, H. (2008, December 6). Higher-order asymptotic cumulants of Studentized estimators in covariance structures. The Joint Meeting of 4th World Conference of the IASC (International Association for Statistical Computing) and 6th Conference of the Asian Regional Section of the IASC on Computational Statistics and Data analysis, Yokohama,

Japan.

〔図書〕(計1件)

(1) Ogasawara, H. (2008). Inverse transformation of Hall' s method back to Edgeworth type expansions: An expository note. In K. Shigemasu, A. Okada, T. Imaizumi, & T. Hoshino (Eds.), *New trends in psychometrics* (pp. 365-370). Tokyo: Universal Academy Press.

〔その他〕

ホームページ等

研究代表者

<http://www.res.otaru-uc.ac.jp/~hogasa/>

機関リポジトリ

<http://barrel.ih.otaru-uc.ac.jp/>

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

小笠原 春彦 (OGASAWARA HARUHIKO)

小樽商科大学・商学部・教授

研究者番号：70271731