

機関番号：33917

研究種目：基盤研究(C)

研究期間：2008～2010

課題番号：20500262

研究課題名(和文) ジャンプ拡散株価過程とリスク・ヘッジ戦略

研究課題名(英文) Jump Diffusion Price Process and Risk Hedge Strategy

研究代表者

田畑 吉雄 (TABATA YOSHIO)

南山大学・ビジネス研究科・教授

研究者番号：30028047

研究成果の概要(和文)：株価過程がジャンプ拡散過程である場合、消極的なリスク・ヘッジ戦略としてインデックス・ファンドの構成法を与えた。また、株価が急落や急騰する状況をうまく記述する数学モデルを提案した。このモデルに従う原資産に対して、ヨーロッパ型コールオプションと交換オプションの価格付け公式を導出し、交換オプションのコールとプットの間にプット・コール・パリティが成立することを示した。

研究成果の概要(英文)：For the passive risk hedge strategy, we present the construction method of an index-fund in the world of continuous time and the stock price with jumps. To hedge the price evolution at a sudden rise or crash of stock and commodity markets, we present a mathematical model. Under this model, we derive the valuation formulas for European call option and exchange option. A put-call-parity between the exchange call option and the put option is provided.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2008年度	1,400,000	420,000	1,820,000
2009年度	1,100,000	330,000	1,430,000
2010年度	1,000,000	300,000	1,300,000
年度			
年度			
総計	3,500,000	1,050,000	4,550,000

研究分野：総合領域

科研費の分科・細目：情報学・統計科学

キーワード：数理ファイナンス、金融工学、ジャンプ拡散過程でのインデックス・ファンド、Verhulst-Gompertz型確率微分方程式、リスク・ヘッジ戦略、ネットワーク外部性効果

## 1. 研究開始当初の背景

売り手と買い手の提示する価格によって均衡する株価過程は、そのパスが連続ではなく、ランダム時点で不連続、ランダムな大きさのジャンプを示すことは、投資家の意思決定と均衡価格生成のメカニズムの解明を目的とするマーケット・マイクロストラクチャーの

研究から広く認められている。このようなジャンプを含む株価過程を適切に表現する数学モデルとしては、Levy過程で駆動される確率微分方程式の解であるジャンプ拡散過程が考えられる。この過程に対して、数理ファイナンスへの応用、最適制御、裁定停止、インパルス制御などに関しては現時点では

研究途上にあり、その点に注目した理論展開を図る必要が叫ばれている。とくに、投資に伴う各種リスクのヘッジは、機関投資家を中心に安全（ローリスク）でそれなりのリターンを獲得する上で欠くことのできない問題であり、実務界でも危急の課題になっている。

リスク・ヘッジの問題は、離散時間モデルに対してはポートフォリオ理論で広く研究され、オプションや先物を組み込んだ積極的なリスク・ヘッジ手段と、インデックス・ファンドの構成のような消極的手段に大別されている。インデックス・ファンドの効率的な構成法に対しては、著者がごく早い段階で0-1変数の数理計画問題に定式化し、効率的な解法を提案している。ところが、連続時間ではこの種の数理計画問題はNP完全となり、現実には最適解の導出が困難な問題群に属することが指摘されている。しかし、連続時間モデルに対するインデックス・ファンドの諸性質については未知な点が多く、とくに、離散時間モデルで成立しているフロンティア曲線との関係が連続時間モデルにも成立するの否かは残された研究分野の1つである。この点を本研究では解明したい。

一方、連続時間でパスにジャンプのあるモデルに対するリスク・ヘッジ戦略としては、オプションの利用が最も解決可能性に富んだ方策であると想定できる。その場合、完備市場という限定された世界において、各種オプションの価格式の導出が最初で必修の課題となる。しかし、世界中の数理ファイナンスの研究者がこの課題に果敢に挑んではいるが、現時点ではほとんど未開拓の色彩が強い。

また、リーマンショック直後や大震災後の株式市場のように、株価が急落・急騰を示す局面で取るべきリスク・ヘッジ戦略についても多くの研究者が興味を抱いているが、未解決で難解な研究対象である。この課題を解決するための第1歩としては、ジャンプを含む数学モデルと、ジャンプを含まないが株価の急落・急騰の状況をうまく記述する確率モデルの構成（確率微分方程式の誘導）が望まれる。さらに、原資産がそのような確率モデルで与えられたとき、その原資産上に書かれたオプションの価格評価を行うことも重要な研究課題であろう。

## 2. 研究の目的

さまざまなタイプの金融リスクをヘッジする戦略的に絞りを、株価変動過程にジャンプを含む場合と、ジャンプはないが、売りが売りを呼び、短期間に株価が急速に下落するような状況を説明する2種類の数学モデルを構築する。まず、株価がジャンプ拡散過程で記述されるとき、機関投資家のような大量の資

金保有者が、株価変動に伴うリスクをヘッジするための戦略について考察する。とくに、インデックス・ファンドを用いる戦略に目を向け、明示的にインデックス・ファンドを導出し、その数学的な性質を解明することを目的とする。

手法的には、株価にジャンプを含んだBlack-Scholes型の確率微分方程式を出発点とし、最適制御理論を用いて求めるべきインデックス・ファンドが満たすべき条件を導出する。そして、その条件の経済的な意味づけを考察する。

さらに、リーマン・ショックや大震災直後の株式市場で観察される株価の急落・急騰に対処するオプション（例えば、交換オプション）を利用したリスク・ヘッジに絞りを、このような局面を記述する数学モデル（Verhulst-Gompertz型の微分方程式）を構築するとともに、価格変動がこの数学モデルで記述された原資産の上に書かれた各種オプション価格の導出を行う。さらに、パリティのようなオプション価格間の関係式を導出し、それらの関係式を用いて原資産価格の変動リスクをヘッジする戦略を定める。

## 3. 研究の方法

現実の証券市場における株価の動きを過去のデータ、および、証券市場でのボードを実際に観察することにより、実際の値動きに近い数学モデル構築の準備を行った。東京証券取引所での観察、取引所の関係者との面談などを通じて、次の2点が重要な性質であることが判明した。まず、その1つは、株価の変動は数々のジャンプを持って構成されること。2つ目は、重大な経済ニュースの結果、売りが売りを呼び、買いが買いを呼ぶという状況が多々あることである。これらの現象は諸外国、とくに、発展途上国やアジアの証券市場で顕著に見られることが判明した。この観測結果に基づき、状況をうまく表現できる数学モデルの作成に着手し、そのモデルのもとでのリスク・ヘッジ戦略について考察した。

(1) リスク・ヘッジ戦略を見出すために、線形空間における射影定理と局所マルチンゲールの性質を利用してトラッキング・エラーの平方の期待値を最小にするインデックス・ファンドの満たすべき条件を導出する。

また、問題を別の見地から眺め、確率制御問題に定式化し、ハミルトン・ヤコビ・ベルマン方程式を導き、その随伴方程式の解を見出す。その結果を利用して、最適なインデックス・ファンドの構成比率とリスク・ヘッジの方法を導出する。

(2) 株価が急落または急騰する状況を記述する数学モデルを作成する。ここでは、生物

体の増減を記述するのに用いられているゴンペルツモデルの確率版を開発（確率微分方程式を誘導する）し、その解を明示的に導出するとともに、数学的性質を検討する。

(3) 原資産が上のゴンペルツモデルに従うとして、この資産上に書かれた各種のオプション（ヨーロッパ型コールオプションや交換オプション）の価格式を具体的に誘導し、オプション評価を行う。その際に、測度変換、ギルサノフの定理、マルチンゲール評価法を利用して、ブラック・ショールズ式との対応を利用する。以上によって、株価が急激にジャンプする局面でのリスク・ヘッジ戦略が見出される。また、コールの価格式が導出できれば、パリティの関係を誘導し、プットの価格式も誘導できる。

(4) 金融分野に限定していた研究成果をものづくりという生産分野での資金調達の問題にいかにも適用するかについても考察する。その場合、オペレーションズ・リサーチの概念が有効であり、両者の関係について最適化をキーワードとして論じる。

#### 4. 研究成果

(1) リスク・ヘッジ戦略の消極的な手段ではあるが、その1つの方法として価格変動がLevy過程に従う数多くの銘柄を考え、それよりもごく少ない銘柄で市場全体の動きに近いポートフォリオを構成する方法としては $0=1$ 二次計画法への定式化を著者らはすでに開発している。しかし、この方法を連続時間モデルに適用するには、計算時間の点でNP-完全な問題になり、実用に耐えうる簡便法の開発が待たれていた。そこで、本研究では、確率制御問題の観点から問題解決を目指し、Bellman-Hamilton-Jacobi方程式と呼ばれている偏微分方程式を誘導し、その随伴方程式である連立常微分方程式を解くという確率制御分野での常套手段を適用した。ところが、一般的にはその連立微分方程式の解析解を導出することがきわめて困難であることが広く認められているのに対し、本研究の成果の1つは、上述の随伴方程式の明示的な解が導出できた点であり、通常は解導出が不可能で、数値計算に頼らざるをえないのに、解析的な形を利用できる結果は大きな成果である。ここでは、株価にジャンプを含む連続時間モデルに対してこの構成法を適用し、インデックス・ファンドのような金融商品の設計方法を提示し、この方法がリスク・ヘッジの伝統的手段で用可能になることを示した。その成果は論文①、②として公刊した。

(2) リーマンショックや大震災直後の株式

市場のように株価の急落や急騰の局面を記述するのにVerhulst-Gompertzタイプの微分方程式が有効であることを指摘し、このタイプの価格変動を示す原資産に対するオプションの価格式を導いた。また、実物商品であるエネルギーのスポット価格のようにその変動がVerhulst-Gompertz型の微分方程式で記述され、一方、エネルギー商社株のようにその変動がBlack-Scholesの幾何ブラウン運動で与えられるとき、両者を交換する交換オプションの価格式も導出した。この種の交換オプションは、エネルギー価格の高騰をヘッジしたい需要家にとってはきわめて強力なヘッジ手段を提供することになる。この理論の背景には、価格がネットワーク外部性の影響を受ける商品の需要と関連が深い。すなわち、ネットワーク外部性とは、ある製品・サービスの価値が、それ自身の物的な価値以外に、どれだけ他のユーザーに利用されているかにも依存して決まることをいい、マーケティングの分野で広く応用されている。ファイナンスの分野ではネットワーク外部性の効果を考慮した研究はほとんど見当たらず、本研究が先頭集団を行っている。とくに、最近のインターネット産業の企業価値を考察する場合に、ネットワークに参加する人数が増加すると、その参加者が受け取る効用や満足度はますます高くなり、その結果、さらにネットワークへの参加者数が増加するという外部効果に注目する点である。この成果は公表論文③、⑤でみられる。

(3) 完備市場において無裁定の仮定（ただ飯を食べるチャンスがない）が、さまざまな派生証券の価格付けにどのように寄与するかを中心に記述した内容を書籍の形で公刊した。価格過程が不連続、ジャンプを含む確率過程に対しては、Itoの補題を適用するのが困難な局面が多々ある。そのような状況に対しても無裁定の概念は強力な威力を発揮する簡便な分析手法であることを強調している。とくに、コンピュータの援用を考慮して、おもに離散時間モデルに力点を置き、2項モデルを中心に各種のデリバティブの評価法について論じている。また、リーマンショックの遠因となったとされている仕組み債や派生証券の性質、信用リスクなどについても言及している。ただ、離散時間モデルの枠内では、時間の概念を明示的に取り入れた価格式を導出するには難があることも言及した。この成果は図書として公刊した。

(4) 本研究の主な対象は、企業活動に際して必要な資金調達を少ないリスクでいかにして効率的に行うかであり、一見、生産分野とは無関係なようである。しかし、伝統的なものづくりの高い技術を有する中小の企業に

においては、グローバル社会での競争に打ち勝つためには、最新の設備の充実、社員の給与など資金面の問題を解決することが強く求められている。このような背景のもとで、金融工学的発想とオペレーションズ・リサーチの手法をものづくりの世界にどのように取り入れるべきかを論じたものを論文④として公刊した。

#### 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 5件)

- ① 田畑吉雄、ジャンプ拡散過程でのインデックス・ファンド、南山経営研究、査読無、Vol.22、No.3、2008、pp.381-390.
- ② Tabata, Y.、Minimum Tracking Error Problem for Jump Diffusion Stock-Price Process, Scientiae Mathematicae Japonicae, 査読有、Vol.70, No. 2, 2009, pp.143-150.
- ③ 赤壁弘康、田畑吉雄、価格がネットワーク外部性の影響を受ける資産/商品に対するデリバティブの評価、ヘッジと複製戦略について、現代ファイナンス、査読有、No. 20、2010、pp. 17-43、
- ④ 田畑吉雄、ビジネススクールにおけるものづくりとOR、査読有、オペレーションズ・リサーチ、Vol. 55、No. 5、2010、pp. 290-294、
- ⑤ Tabata, Y.、and Akakabe, H.、Valuation of Derivative on Asset with Network Price Externality Effects, Ninth International Symposium on Operations Research and Its Applications、査読有、2010、pp. 68-74.

[学会発表] (計 3件)

- ① 田畑吉雄、赤壁弘康、価格がネットワーク外部性の影響を受ける資産/商品に対するデリバティブの評価、ヘッジと複製戦略について、経営財務研究学会西部地区研究集会、2009年4月26日、名古屋市立大学、
- ② 田畑吉雄、オペレーションズ・マネジメントとものづくり、日本オペレーションズ・リサーチ学会、2009年12月12日、関西学院大学梅田キャンパス、
- ③ 田畑吉雄、Valuation of Derivative on Asset with Network Price Externality Effects, ISORA, 2010年8月25日、成都市、中国、

[図書] (計 1件)

- ① 田畑吉雄、牧野書店、フリーランチと金融工学、2009、267.

[産業財産権]

○出願状況 (計 件)

名称：  
発明者：  
権利者：  
種類：  
番号：  
出願年月日：  
国内外の別：

○取得状況 (計◇件)

名称：  
発明者：  
権利者：  
種類：  
番号：  
取得年月日：  
国内外の別：

[その他]

ホームページ等

#### 6. 研究組織

(1) 研究代表者

田畑吉雄 (TABATA YOSHIO)

南山大学・大学院ビジネス研究科・教授

研究者番号：30028047

(2) 研究分担者

( )

研究者番号：

(3) 連携研究者

( )

研究者番号：