

機関番号：12608

研究種目：基盤研究（A）

研究期間：2009～2011

課題番号：20540006

研究課題名（和文） アフィン量子群のレベル・ゼロ表現の結晶基底の代数的サイクルとしての実現

研究課題名（英文） Realization of the crystal bases of level-zero representations of quantum affine algebras as algebraic cycles

研究代表者 内藤 聡 (Naito Satoshi) 東京工業大学・大学院理工学研究科・教授

研究者番号：60252160

研究成果の概要（和文）：

素粒子物理学、弦理論、統計力学等の（数理）物理学の多くの分野において現れる重要な対称性の一つであるアフィン・リー環（の普遍展開環）の q -変形（量子変形）としてアフィン量子群は導入された。このアフィン量子群の線形な作用（表現）についての研究は、素粒子や弦の状態を調べる際に非常に有用である。そこで、我々は、最も基本的な A 型アフィン量子群の表現の中で最も普遍的なもの（Verma 加群）の基底の $q = 0$ での様子（結晶基底）について、凸多面体の言葉で組合せ論的に明示的な記述を与えた。

研究成果の概要（英文）：

In various areas of (mathematical) physics, such as particle physics, string theory, and statistical mechanics, affine Lie algebras appear as a natural symmetry; a quantum affine algebra is introduced as a q -deformations (or a quantum deformation) of the universal enveloping algebra of an affine Lie algebra.

The study of representations (i.e., linear actions on vector spaces) of quantum affine algebras are very useful in examining the states of particles or strings.

The main result of our research is an explicit combinatorial description, in terms of convex polytopes, of the crystal bases of Verma modules (i.e., the most universal highest weight modules) for type A quantum affine algebras.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2008 年度	900,000	270,000	1,170,000
2009 年度	700,000	210,000	910,000
2010 年度	700,000	210,000	910,000
2011 年度	600,000	180,000	780,000
年度			
総計	2,900,000	870,000	3,770,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・代数学

キーワード：リー環論・量子群の表現論

1. 研究開始当初の背景

(1) 有限次元複素半単純リー環（に付随する量子群）の有限次元既約最高ウェイト表現の結晶基底が、アフィン・グラスマン多様

体の中の Mirkovic-Vilonen サイクルと呼ばれる部分多様体の族によって幾何学的に実現される事は、幾何学的佐武対応（の精密化）として良く知られていた。そこで、

Anderson は、これらの Mirkovic-Vilonen サイクルのモーメント写像による像として Mirkovic-Vilonen 多面体を導入し、その多面体としての組合せ論的な性質を調べたが、その多面体としての特徴付けまでは得られなかった。その後、Kamnitzer は、Mirkovic-Vilonen 多面体の辺の長さ (Lusztig data) についての関係式による特徴付け、及び Mirkovic-Vilonen 多面体を幾つかの半空間の共通部分として表した時のそれらの半空間の原点からの距離 (Berenstein-Zelevinsky data) についての関係式による特徴付けを得た。

(2) 一方、アフィン・リー環に付随する量子群 (アフィン量子群) の有限次元表現の中で最も基本的なレベル・ゼロ基本表現とそれらのテンソル積表現は結晶基底を持つ事が柏原正樹によって証明されていた。そして、我々の以前の研究によって、これらの加群の結晶基底は、レベル・ゼロ (ウェイトを型とする) Lakshmibai-Seshadri パスによって組合せ論的に実現される事が分かっていた。

(3) 有限次元半単純リー環の有限次元既約最高ウェイト表現の結晶基底については、通常の Lakshmibai-Seshadri パスによって組合せ論的に実現される事が既に Littelmann によって示されていた。しかし、Mirkovic-Vilonen 多面体には、Lakshmibai-Seshadri パスだけからでは得られないより多くの表現論的情報が含まれている事が認識され出していた。

(4) このような背景の下で、我々は、アフィン量子群のレベル・ゼロ基本表現及びそれらのテンソル積加群の結晶基底をパラメトライズするような凸多面体の族を特徴づけ、さらにはそれらをモーメント写像による像として持つような代数的サイクルの族を構成したいと考えた。

(5) 特に、アフィン・リー環が A 型の場合には、特殊な事情があって、各レベル・ゼロ基本表現は A 型の有限次元単純リー環の基本表現に他ならず、従ってそれらの結晶基底は集合としては通常の Mirkovic-Vilonen サイクルあるいは Mirkovic-Vilonen 多面体として実現されるので、先ず A 型のアフィン量子群の場合にこの問題を研究し、その後より一般のアフィン量子群のレベル・ゼロ有限次元表現の場合に研究の対象を広げようと考えた。

2. 研究の目的

(1) アフィン・リー環に付随する量子群 (アフィン量子群) の有限次元表現の内でも最も基本的なものは、レベル・ゼロ基本表現及びそのテンソル積表現である。これらは、アフィン量子群の有限次元表現の全体の成すグロタンディーク環の (既約表現とは別

の) 基底である標準加群 (または、ワイル加群とも呼ばれる) の持つスペクトル・パラメーターとしてある種の特種なものを取ったものであり、結晶基底を持つ事が柏原正樹によって証明されている。

(2) 我々の研究の当初の目的は、有限次元半単純リー環の有限次元既約最高ウェイト表現の結晶基底を幾何学的に実現する Mirkovic-Vilonen サイクルの類似物として、レベル・ゼロ基本表現及びそれらのテンソル積表現の結晶基底を幾何学的に実現する代数的サイクルを構成する事であった。

(3) 上記の Mirkovic-Vilonen サイクルは、アフィン・グラスマン多様体の中の有限次元部分代数多様体 (サイクル) として構成されるものなので、アフィン量子群の有限次元レベル・ゼロ表現の結晶基底は、ダブルアフィン・グラスマン多様体の中の有限次元部分代数多様体 (サイクル) として構成されるであろうと予想された。

(4) そして、これらの代数的サイクルのモーメント写像による像として、Mirkovic-Vilonen 多面体の類似物であるある種の凸多面体の族が得られるものと考えた。特に、Mirkovic-Vilonen 多面体の Kamnitzer による特徴付けは Berenstein-Zelevinsky data の間の tropical Plucker 関係式を用いるものであったが、これのアフィン・リー環の場合の類似物としては、可積分系の理論における広田・三輪方程式 (を超離散化したもの) が予想された。

3. 研究の方法

(1) 先ず、A 型アフィン量子群の下半三角部分の結晶基底をパラメトライズするような Berenstein-Zelevinsky data のアフィン類似を構成する事を考えた。その為に、A 型アフィンの Dynkin 図形が、(有限 A 型の Dynkin 図形を両側に無限に伸ばした)

A_{∞} に対して平行移動が定めるグラフ自己同型写像を考えてその固定点をとったものとみなせる事に注目した。

そして、 A_n 型の有限次元単純リー環に対する Berenstein-Zelevinsky data の n を無限大にした時のある種の射影極限を取り、さらにそれらの中で (平行移動による固定点を取る操作に対応するように) 周期性条件を満たすもののみを取り出し、アフィン A 型の場合の Berenstein-Zelevinsky data とみなせるものを構成する事ができた (研究分担者の一人である筑波大学の佐垣大輔准教授との共同研究)。

(2) 実際、これらの Berenstein-Zelevinsky data (のアフィン類似物) 全体の成す集合に作用する柏原作用素を導入する事ができて、その結果得られるクリスタル・グラフが連結である事を証明す

る事ができた（東京大学の斉藤義久准教授との共同研究）。この証明においては、有限 A 型の場合の Berenstein-Zelevinsky data の、A 型 quiver に付随する Lusztig quiver variety の既約 Lagrangian 部分多様体の族を用いた解釈が重要な役割を果たした。

(3) さらには、これらの Berenstein-zelevinsky data の全体が A 型アフィン量子群の下半三角部分の結晶基底とクリスタルとして同型である事を証明する事ができた（佐垣大輔准教授と斉藤義久准教授との共同研究）。この証明には、Berenstein-Zelevinsky data の Maya 図形による詳細な組合せ論的記述が重要な役割を果たした。

(4) しかし、レベル・ゼロ基本表現及びそれらのテンソル積表現に対して Berenstein-Zelevinsky data の類似物を構成するには、我々の以前の研究でこれらの表現の結晶基底の組合せ論的実現を与えることが既に分かっているレベル・ゼロ Lakshmibai-Seshadri パスのより明示的な表示が必要であった。

4. 研究成果

(1) 我々は、有限次元半単純リー環に付随する量子群の下半三角部分の結晶基底に対応する Mirkovic-Vilonen 多面体を記述する Berenstein-Zelevinsky data の類似物を、A 型のアフィン・リー環の場合にも構成し、それらが実際に A 型アフィン量子群の下半三角部分の結晶基底とクリスタルとして同型である事を証明した。但し、これらが有限 A 型の場合のように tropical Plucker 関係式で特徴付けられる事までは示せなかった。

(2) この結果は、Mirkovic-Vilonen 多面体の概念をアフィン・リー環の場合にまで拡張しようとした最初の結果であり、Kamnitzer や Tingley 他、世界の少なからぬ研究者に注目された。実際、この我々の結果に刺激されて、Muthiah 等が関連した結果を発表している。

但し、アフィン A 型の quiver に付随する Lusztig quiver variety の既約 Lagrangian 部分多様体族との関係は、現在も不明のままである。

(3) 一方でその後、レベル・ゼロ Lakshmibai-Seshadri パスは、アフィン・リー環の標準的な部分リー環である有限次元単純リー環のワイル群に付随する量子 Bruhat グラフによって非常に明示的に記述される事が分かった。そして、この量子 Bruhat グラフは、アフィン・ワイル群上の (Lusztig により導入された) generic Bruhat 順序と極めて密接に関係している (ほとんど同値な概念であると言える) 事が分かっている。そして、アフィン・ワイル群

上の generic Bruhat 順序は、(通常のアフィン・グラスマン多様体ではなく、Beilinson-Drinfeld グラスマン多様体を経由して) semi-infinite 旗多様体の中の Schubert stratification を用いて幾何学的に記述される事が Feigin-Finkelberg-Kuznetsov-Mirkovic によって示されている。これらの事は、レベル・ゼロ基本表現及びそれらのテンソル積表現の結晶基底の幾何学的実現を与える代数的サイクルは、アフィン・グラスマン多様体やダブルアフィン・グラスマン多様体の部分多様体としてではなく、semi-infinite 旗多様体の部分多様体として構成されるであろう事を強く示唆していると考えられる。

(4) この様な事情の下で、本研究課題は、研究計画最終年度前年度の応募で新規に応募し採用された研究計画「アフィン量子群の標準加群の結晶基底の幾何学的実現」(課題番号: 24540010, 研究種目: 基盤研究 (C), 平成 24 年度 ~ 平成 28 年度) に引き継がれている。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 12 件)

- (1) S. Naito, D. Sagaki, and Y. Saito, Toward Berenstein-Zelevinsky data in affine type A, part III: Proof of the connectedness, Springer Proceedings in Mathematics and Statistics, 査読有り, Vol. 40, 2013, pp. 361-402, DOI 10.1007/978-1-4471-4863-0_15.
- (2) S. Naito and D. Sagaki, Tensor product multiplicities for crystal bases of extremal weight modules over quantum infinite rank affine algebras of types B_{∞} , C_{∞} , and D_{∞} , Trans. Amer. Math. Soc., 査読有り, Vol. 364, no. 12, 2012, pp. 6531-6564, S 0002-9947 (2012) 05597-8.
- (3) S. Naito, D. Sagaki, Y. Saito, Toward Berenstein-Zelevinsky data in affine type A, part II: Explicit description, Contemporary Mathematics, 査読有り, Vol. 565, 2012, pp. 185-216, <http://dx.doi.org/10.1090/conm/565/11179>.
- (4) S. Naito, D. Sagaki, and Y. Saito, Toward Berenstein-Zelevinsky data in affine type A, part I: Construction of the affine analogs, Contemporary Mathematics, 査読有り, Vol. 565, 2012, pp. 143-184,

- <http://dx.doi.org/10.1090/conm/565/11180>.
- (5) S. Kato, S. Naito, and D. Sagaki, Tensor products and Minkowski sums of Mirkovic-Vilonen polytopes, *Transform. Groups*, 査読有り, Vol. 17, no. 1, 2012, pp. 195–207, DOI 10.1007/s00031-011-9159-0.
 - (6) S. Kato, S. Naito, and D. Sagaki, Polytopal estimate of Mirkovic-Vilonen polytopes lying in a Demazure crystal, *Adv. Math.*, 査読有り, Vol. 226, no. 3, 2011, pp. 2587–2617, <http://dx.doi.org/10.1016/j.aim.2010.09.010>.
 - (7) S. Naito and D. Sagaki, Crystal base elements of an extremal weight module fixed by a diagram automorphism II: case of affine Lie algebras, *Progr. Math.*, 査読有り, Vol. 284, 2012, pp. 225–255, DOI 10.1007/978-0-8176-4697-4_9.
 - (8) S. Naito and D. Sagaki, Mirkovic-Vilonen polytopes lying in a Demazure crystal and an opposite Demazure crystal, *Adv. Math.*, 査読有り, Vol. 221, no. 6, 2009, pp. 1804–1842, <http://dx.doi.org/10.1016/j.aim.2009.03.008>.
 - (9) S. Naito and D. Sagaki, Lalshmbai-Seshadri paths of level-zero shape and one-dimensional sums associated to level-zero fundamental representations, *Compos. Math.*, 査読有り, Vol. 144, no. 6, 2008, pp. 1525–1556, <http://dx.doi.org/10.1112/S0010437X08003606>.
 - (10) S. Naito and D. Sagaki, A modification of the Anderson-Mirkovic conjecture for Mirkovic-Vilonen polytopes in types B and C, *J. Algebra*, 査読有り, Vol. 320, no. 1, 2008, pp. 387–416, <http://dx.doi.org/10.1016/j.jalgebra.2008.02.009>.
 - (11) S. Naito and D. Sagaki, Crystal structure on the set of Lakshmibai-Seshadri paths of an arbitrary level-zero shape, *Proc. Lond. Math. Soc.* (3), 査読有り, Vol. 96, no. 3, 2008, pp. 582–622, doi: 10.1112/plms/pdm034.
 - (12) 内藤 聡・佐垣 大輔、量子アファイン展開環上の extremal ウェイト加群の結晶基底と Littelmann のパス模型, *日本数学会雑誌 ‘数学’*, 査読無し, 第 62 巻, 第 1 号, 2010 年, pp. 57–84.
- [学会発表] (計 14 件)
- (1) D. Sagaki, 量子 Bruhat グラフを用いたレベル・ゼロ LS パスの表示, 組合せ論的表現論とその周辺, 2012 年 10 月 11 日, 京都大学数理解析研究所.
 - (2) S. Naito, On the description of level-zero Lakshmibai-Seshadri paths in terms of the quantum Bruhat graph, Conference on Groups, VOAs and Related Structures in Honor of Masahiko Miyamoto, 2012 年 9 月 13 日, 筑波大学.
 - (3) S. Naito, On an intrinsic description of level-zero Lakshmibai-Seshadri paths and the quantum Schubert calculus, Mathematical Society of Japan, Seasonal Institute 2012 “Schubert Calculus”, 2012 年 7 月 26 日, 大阪市立大学.
 - (4) S. Naito, Tensor products and polytopal estimates of Mirkovic-Vilonen polytopes, The 5th International Conference on Representation Theory, 2010 年 8 月 9 日, Xian (People’s Republic of China).
 - (5) D. Sagaki, Tensor product multiplicities for crystal bases of extremal weight modules over quantum infinite rank affine algebras of types B_{∞} , C_{∞} , and D_{∞} , 第 10 回名古屋国際数学コンファレンス “Representation Theory of Algebraic Groups and Quantum Groups ‘10””, 2010 年 8 月 6 日, 名古屋大学.
 - (6) S. Naito, Polytopal estimate of Mirkovic-Vilonen polytopes lying in a Demazure crystal, 第 13 回代数群と量子群の表現論研究集会, 2010 年 6 月 5 日, 愛知県江南市.
 - (7) D. Sagaki, Tensor product multiplicities for crystal bases of extremal weight modules over quantum infinite rank affine algebras of types B_{∞} , C_{∞} , and D_{∞} , 第 13 回代数群と量子群の表現論研究集会, 2010 年 6 月 5 日, 愛知県江南市.
 - (8) D. Sagaki, 量子アファイン環のレベル・ゼロ日本表現とそのテンソル積のパス模型, 日本数学会代数学分科会特別講

- 演, 2009年9月27日, 大阪大学.
- (9) S. Naito, Polytopal estimate of Mirkovic-Vilonen polytopes lying in a Demazure crystal, International Workshop on “Combinatorial and Geometric Approach to Representation Theory”, 2009年9月21日, Seoul National University (Republic of Korea).
- (10) D. Sagaki, Mirkovic-Vilonen polytopes lying in a Demazure crystal and an opposite Demazure crystal, International Workshop on “Combinatorial and Geometric Approach to Representation Theory”, 2009年9月21日, Seoul National University (Republic of Korea).
- (11) S. Naito, On crystals of Lakshmibai-Seshadri paths and extremal weight modules over quantum affine algebras, 2008年度表現論シンポジウム概説講演, 2008年11月12日, 静岡県熱海市.
- (12) D. Sagaki, Berenstein-Zelevinsky datum for the affine Lie algebra of type $A_{1}^{\{1\}}$, International Workshop on “Crystals and Tropical Combinatorics”, 2008年8月30日, 京都市.
- (13) S. Naito, Mirkovic-Vilonen polytopes lying in a Demazure crystal, International Workshop on “Crystals and Tropical Combinatorics”, 2008年8月28日, 京都市.
- (14) S. Naito, Mirkovic-Vilonen polytopes for Demazure crystals, Satellite Conference to the 5th European Congress of Mathematics “Noncommutative Structures in Mathematical Physics”, 2008年7月23日, Brussels (Belgium).

[図書] (計 0 件)

[産業財産権]

○出願状況 (計 0 件)

名称：
 発明者：
 権利者：
 種類：
 番号：
 出願年月日：
 国内外の別：

○取得状況 (計 0 件)

名称：
 発明者：
 権利者：
 種類：
 番号：
 取得年月日：
 国内外の別：

[その他]
 ホームページ等

6. 研究組織

(1) 研究代表者

内藤 聡 (NAITO, Satoshi)
 東京工業大学・大学院理工学研究科・教授
 研究者番号：60252160

(2) 研究分担者

竹山 美宏 (Takeyama Yoshihiro)
 筑波大学・数理物質系数域・准教授
 研究者番号：60375392

佐垣 大輔 (Sagaki Daisuke)
 筑波大学・数理物質系数域・准教授
 研究者番号：40344866

(注. 上記の2名は、平成23年3月31日までは研究分担者であったが、平成23年4月1日以降は連携研究者として研究に参画してもらった。)

(3) 連携研究者

()

研究者番号：