

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成 24年 6 月 4 日現在

機関番号：12601

研究種目：基盤研究（C）

研究期間：2008～2011

課題番号：20540011

研究課題名（和文）一般化されたバルマ加群の研究

研究課題名（英文）Study of generalized Verma modules

研究代表者

松本 久義（MATUMOTO HISAYOSI）

東京大学・大学院数理科学研究科・准教授

研究者番号：50272597

研究成果の概要（和文）：正規型放物型代数の場合にスカラー型の一般化 Verma 加群の間の準同型の分類を無限小指標が非特異整数的という条件のもとで行った。また C 型リー代数のヤコビ放物型部分代数などの完備化に含まれる Whittaker 加群やある種の古典群の主系列表現の Whittaker 双対の既約性についての結果も得られた。またこの研究に関連して、第 49 回実関数論・函数解析学合同シンポジウムについての助成を行った。

研究成果の概要（英文）：We classified homomorphisms between scalar generalized modules associated with normal parabolic subalgebras of exceptional Lie algebras under the assumption that the infinitesimal characters are regular integral. We also studied Whittaker modules in the completion of generalized modules associated with parabolic subalgebras including Jacobi parabolic subalgebras of simple Lie algebras of the type C. We also obtained results on irreducibility of the Whittaker dual of principal series representations. We supported 49th joint Symposium on Real Analysis and Functional Analysis.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合計
2008年度	900,000	270,000	1,170,000
2009年度	800,000	240,000	1,040,000
2010年度	800,000	240,000	1,040,000
2011年度	800,000	240,000	1,040,000
年度			
総計	3,300,000	990,000	4,290,000

研究分野：代数学

科研費の分科・細目：数学・代数学

キーワード：一般化旗多様体，半単純リー群，ユニタリ表現，一般化バルマ加群，有限 W 代数

1. 研究開始当初の背景

一般化旗多様体は球や射影空間を含む、基本的な数学的対象である。スカラー型一般化 Verma 加群は一般化旗多様体と密接な関連のある代数的な対象であり、それらの間の準同型の分類は一般化旗多様体上の同変直線束の間の不変線形微分作用素の分類と同値である未解決な基本問題である。研究代表者

は過去の研究により極大放物型部分代数に対応する場合にこの問題を解決し、それを応用して一般の場合にも要素的準同型というクラスの準同型の存在を確立した。予想としては任意の準同型が要素的準同型の合成であらわされることでありこれが肯定的に解ければ準同型の分類が完成することになる。この予想は特別な場合には解決していた。

2. 研究の目的

(1) 一般の放物型部分代数の場合に対してスカラー型の一般化された Verma 加群の間の準同型の分類を完成することが最終目標である。特に、対称空間に付随した場合の分類の解決ならびに正規放物型部分代数の場合を当面の課題として設定した。

(2) 一般化された Verma 加群の完備化に含まれる Whittaker 加群の構造の決定も目標とした。

3. 研究の方法

有限次元表現をテンソルして誘導された準同型の挙動を調べる手法を徹底的に精密な形で行うことにより例外型のような具体的な場合は準同型の存在を決定できるばあいがある。また原始的イデアルの理論などの一般論を援用して存在条件を絞ることも有効であった。さらにもっとも特異的なパラメーターの場合は多くは状況が簡単であるので、上述の手法によりその場合に帰着するのが常套的な手法である。

4. 研究成果

(1) 正規型放物型代数の場合にスカラー型の一般化 Verma 加群の間の準同型の分類を無限小指標が非特異整数的という条件のもとで行った。また正規でないいくつかの場合についても結果を得ている。この研究は論文 On the homomorphisms between scalar generalized Verma modules (<http://jp.arxiv.org/abs/1205.6748>) にまとめた。

(2) 放物型部分代数が局所有限に作用する複素半単純リー代数の有限生成加群の作る圏(いわゆる放物型 0 圏)から Whittaker 加群の作る圏への関手が以前から定義されていたが、単純加群の像を $\mathfrak{so}(2n, 1)$ の極小放物型部分代数の複素化と $\mathfrak{sp}(n, \mathbb{C})$ の Jacobi 放物型部分代数の場合に調べた。放物型 0 圏は Soergel の結果によりこの 2 つの場合は同型になるのであるが、一般化された旗多様体についての moment map が像の上で双有理になるかどうか違うことが効いてきて、Whittaker 加群を対応させる関手の挙動はまったく異なる。一方で Whittaker vector の空間にはある有限群が作用するがその作用込みで考えるといままで調べた例では Whittaker 加群の圏と放物型 0 圏の構造は小さい加群を除いては同じになるという現象を確認している。一般の場合にどうなっているのかを調べるのは今後の課題である。また、今まで結果が知られていた moment map の双有理性が成り立つ場合でない時の退化主系列表現の連続 Whittaker vector を(パラメーターの正值性の仮定の下で)partial Jacquet integral として構成した。以上の

成果は研究集会 "Nilpotent Orbits and Representation Theory" (2011 年 12 月 19 日-23 日)において "Whittaker modules and vectors associated with the Jacobi parabolic subalgebras" という講演で発表した。

(3) quasi-split な実半単純線形群において既約認容表現の上の連続 Whittaker vector の空間の次元は高々 1 であることが知られておりこれは保型表現の理論において重要な役割を果たす。(重複度 1 定理) 一方 quasi-split で無い場合は連続 Whittaker vector の空間の次元は 1 より大きくなりうる。一方、代数的な Whittaker vector の Kostant-Lynch による研究により連続 Whittaker vector の空間はある非可換代数上の加群になることが知られていた。その代数は近年、affine Lie 代数における W-代数の有限次元半単純 Lie 代数における類似物であることが認識され有限 W-代数と呼ばれるようになった。そこで、重複度 1 定理の自然な一般化として連続 Whittaker vector の空間は有限 W-代数加群として既約であるという素朴な予想が出てくる。この予想はすでに A 型の群および $\mathfrak{SO}(p, q)$ で $p+q$ が偶数になる場合に肯定的であることを示していた。 $\mathfrak{SO}_0(2n, 1)$ に対して肯定的であるが $\mathfrak{SO}(2n, 1)$ に対しては素朴な予想は離散系列表現に対して否定的であることがわかった。そこで、有限 W-代数だけでなく、連続 Whittaker vector の空間に作用するある群の作用を加味すると既約になるという修正を予想に施すと、 $\mathfrak{SO}(p, q)$ で $p+q$ が奇数の場合でも修正された予想は正しいことが確かめられた。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 0 件)

[学会発表] (計 6 件)

① 松本久義: "On homomorphisms between scalar generalized Verma modules," Mini-Workshop on Representation Theory. (September 2008). University of Tokyo

② 松本久義: "On homomorphisms between scalar generalized Verma modules," Conference in honor of Toshio Oshima's 60th birthday Differential Equations and Symmetric Spaces. (October 2009). University of Tokyo

③ 松本久義: "On homomorphisms between scalar generalized Verma modules," The 8th

Workshop on Nilpotent Orbits and Representation Theory. (March 2009). Ogoto Shiga Japan

④松本久義: "On existence of homomorphisms between generalized Verma modules" Representation Theory of Real Reductive Groups(国際研究集会). (July 2009). ヌタ大学

⑤松本久義: "On a finite W-algebra module structure on the space of continuous Whittaker vectors for an irreducible Harish-Chandra modules" The 9th Workshop on Nilpotent Orbits and Representation Theory. (February 2010). 北海道大学

⑥松本久義: "Whittaker modules and vectors associated with the Jacobi parabolic subalgebras" : "The 10th Workshop on Nilpotent Orbits and Representation Theory" (February 2011). 九州大学

6. 研究組織

(1) 研究代表者

松本 久義 (MATUMOTO HISAYOSI)

東京大学・大学院数理科学研究科・准教授
研究者番号: 50272597

(2) 研究分担者 該当なし

()

研究者番号:

(3) 連携研究者 該当なし

()

研究者番号: