

機関番号：17201

研究種目：基盤研究(C)

研究期間：2008～2010

課題番号：20540019

研究課題名（和文）整数論及びその離散数理領域への展開

研究課題名（英文）Number Theory and its Development to Discrete Mathematics

研究代表者

中原 徹 (NAKAHARA TORU)

佐賀大学・名誉教授

研究者番号：50039278

研究成果の概要（和文）：本研究課題の主体をなす整数論，とくにアーベル体に関する Hasse の問題 [A]，数論幾何，代数幾何[B]並びにその離散分野への応用[C]に関して，パキスタン・イスラム共和国 NUCES[先端科技大]と佐賀大学大学院工学系研究科との Workshop on Number Theory in Saga を2008～2010年度の各1月及び8月に両国の先端的若手及び中堅研究者を中心に計5回佐賀大学にて実施した．先行して研究代表者はNUCESに延べ2年半滞在し，Peshawar, Lahore 両 Campus PhD 大学院生，ポストドク及び国内研究者との共同研究を行った．

研究成果の概要（英文）：On the core subjects of this research theme; Number Theory, specifically Hasse's problem related to Abelian fields[A], Arithmetic, Algebraic geometry[B] and its application to Discrete Mathematics[C], we held the Workshop on Number Theory in Saga in each August and January of 2008~2010. The research organizer stayed at NUCES during two and half years to work the joint research with PhD scholars at both campuses. On Hasse's problem, the organizer obtained the characterization on the monogeneity for certain family of pure sextic and pure octic fields by the joint work with PhD scholars at NUCES. In our research on algebraic geometry codes, Cooperative Uehara gave an idea of constructing a new class of algebraic geometry codes different from the known codes of one-point type. Also, applying the concept of evaluation codes, which generalize one-point-type algebraic geometry codes, Uehara invented a method of constructing codes from integer rings on algebraic number fields, and presented some explicit examples of such codes[C]. Cooperative Miyazaki studied the minimal free resolution of Buchsbaum varieties and obtained a classification of the Buchsbaum variety in terms of the Castelnuovo-Mumford regularity[B]. Cooperative Terai studied Stanley-Reisner ideals, which are squarefree monomial ideals in polynomial rings[B]. Cooperative Katayama . has determined finite symplectic groups of cube and 4th order, using the structure of the unit groups of cubic and quadratic fields, and announced these results at the workshop in Saga 2011. Newman, Shanks and Williams determined finite symplectic groups of square order in 1980's. Katayama also investigated the number of congruent k-polygons inscribed in a unit circle, where the vertices chosen from n division points of the circle[C]. Cooperative Taguchi studied the ramification theory of truncated discrete valuation rings (=: tdvr's) and the (non)existence of mod p Galois representations. On the former, Taguchi proved (jointly with T. Hiranouchi) that the category of finite extensions of a tdvr A is equivalent to a category of finite extensions, with restricted ramification, of a complete discrete valuation field which lifts A. On the latter, Taguchi proved (jointly with H. Moon) the non-existence of 2-dimensional mod 2 Galois representations for some quadratic fields[B].

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2008年度	1,200,000	360,000	1,560,000

2009年度	1,100,000	330,000	1,430,000
2010年度	1,100,000	330,000	1,430,000
年度			
年度			
総計	3,400,000	1,020,000	4,420,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・代数学

キーワード：代数的整数論, Hasse の問題, 純 6 次体, 頂切離散付値環, Buchsbaum 多様体, モノミアル イdeal, 一点型代数幾何符号, symplectic group, 分割関数

1. 研究開始当初の背景 1960 年代半ば, ハッセにより提唱された代数体 K の整数環の単生成 (monogeneity) について [以下, ハッセの問題という], 韓国並びにパキスタンの PhD 大学院生との K が或るアーベル拡大の場合の共同研究が発端である [研究代表者]. Mod 2 Galois 表現の非存在は今後, 実二次体の場合の Serre の保型性予想の証明の「帰納法の第一段階」として機能する事が期待される [研究分担者田口]. 射影多様体の自由分解を研究対象とし, いくつかの不変量の関係を調べている. 射影多様体の分類できるクラスを見つけることで解決している [研究分担者宮崎]. 被約単項式イdealである Stanley-Reisner イdeal及び, 多項式環を Stanley-Reisner イdealで割った環である Stanley-Reisner 環は可換環論的観点のみならず Stanley-Reisner 環から定まる単体的複体を通して組合せ論, トポロジーとも深く関係しており, とても興味深い研究対象である [研究分担者寺井]. 代数幾何符号の中には優良な符号が含まれていることは知られているが, その構成法は確立されていない. 本研究では, 多項式環や代数体の整数環から優良な代数幾何符号を構成する方法を探求する [研究分担者上原].

2. 研究の目的 ハッセの問題について, 代数拡大体 K が非アーベルの場合に monogeneity の分類を目指す [研究代表者]. 多変数多項式環の関係式から, 求める符号が構成できると考えている [上原]. 頂切離散付値環の分岐理論は, 剰余体が一般の場合に, この様な環の Abbes-Saito 式の分岐理論を建設する事が目的であり, これまでに示せている圏同値が「持ち上げに依らない」事を示すのが今後の目標である [田口].

3. 研究の方法 代数体 K が純 6 次体の場合にデデキントによる体が純 3 次体の場合の結果を踏まえ, アーベル核拡大の場合の手法が援用できる K のガロア閉包からの適当な相対ノルムを考察した [研究代表者]. 一点型代数幾何符号を一般化した評価符号のという枠組みを利用して, 代数体の整数環

から符号を構成する手法を考案して, 幾つかの具体例を提示した [上原].

4. 研究成果 代数体 K が純 6 次体の場合の結果は NUCES, Lahore Campus の PhD 大学院生 Shahzad Ahamad 氏との共同研究にまとめ, その論文は投稿中である. 体 K が純 8 次拡大の場合には同 PhD 大学院生 Abdul Hameed 氏との共同研究に結実を迎えつつある [研究代表者]. 頂切離散付値環の分岐理論, 及び mod p Galois 表現の存在・非存在についての研究を行った. 前者については平之内俊郎氏と共同で, 頂切離散付値環 A の有限次拡大の圏が, A の持ち上げである完備離散付値体の分岐を制限した有限次拡大の圏と圏同値になる事を示した. 後者については文賢淑氏と共同で, 幾つかの二次体の場合に 2 の外不分岐 2 次元 mod 2 Galois 表現が存在しない事を示した [田口]. Buchsbaum 多様体の自由分解について研究し, Castelnuovo

-Mumford 正則量を用いての射影多様体の分類を得た [宮崎]. 多項式環の被約単項式イdealである Stanley-Reisner イdealについて研究した [寺井]. 不定方程式の応用として有限単純群のうちシンプレクティック群の位数で平方数になるものの決定は, Shanks 等によって 1980 年代に決定されている. 研究分担者片山は, 3 次体の単数群および 2 次体の単数群の構造を用いて 3 乗数または 4 乗数になる場合は無いことを 2011 年の佐賀での Workshop で発表した. また分割関数の問題について, 単位円の n 等分点のうち k 個の頂点を選んで出来る k 多角形の合同類の数とその合同類の数を係数とする母関数の性質について, k が小さい場合に考察し Journal of Mathematics, The University of Tokushima 2009, 2010 で発表した [片山]. 代数幾何符号の研究において, 従来の一点型とは別の新しい符号構成の方法のアイデアを示した [上原].

5. 主な発表論文等

(研究代表者, 研究分担者及び連携研究者には下線)

〔雑誌論文〕(計 25=23+2 件)

- ① M. Barile and N. Terai, The Stanley-Reisner ideals of polygons as set-theoretic complete intersections, *Communications in Algebra* に掲載予定, 査読有
- ② H. Haghighi, N. Terai, S. Yassemi, and R. Zaare-Nahandi, Sequentially simplicial complexes and Sequentially S_2 graphs, *Proc. Amer. Math. Soc.*, To appear, 査読有
- ③ K. Kimura, N. Terai, and K. Yoshida, Schmitt-Vogel type lemma for reductions, *Archiv der Mathematik (Basel)* に掲載予定, 査読有
- ④ C. Miyazaki, Buchsbaum varieties with next to sharp bounds on Castelnuovo-Mumford regularity, *Proc. AMS* (to appear) 2011, 査読有
- ⑤ M. Crupi, G. Rinaldo, and N. Terai, Cohen-Macaulay edge ideal whose height is half of the number of vertices, *Nagoya Mathematical Journal*, 201(2011), 117-131, 査読有
- ⑥ T. Doi and S.-i. Katayama, On partitions and k -Polygons, *J. of Mathematics*, The University of Tokushima, 44(2011), 査読無
- ⑦ T. Hiranouchi and Y. Taguchi, Flat modules and Gröbner bases over truncated discrete valuation rings, *Interdisciplinary Information Sciences*, 16(2010), 33-37, 査読有
- ⑧ M. Barile and N. Terai, Arithmetical ranks of Stanley-Reisner ideals of simplicial complexes with a cone, *Communications in Algebra* 38(2010) 3686-3695, 査読有
- ⑨ M. Crupi, G. Rinaldo, N. Terai and K. Yoshida, Effective Cowsik-Nori theorem for edge ideals, *Comm. Alg*, 38(2010), 3347-3357, 査読有
- ⑩ V. Ene, O. Olteanu, and N. Terai, Arithmetical rank of Lexsegment edge ideals, *Bull. Math. Soc. Sci. Math. R. S. Roumanie (N.S.)* 53 (101) (2010), 315-327, 査読有
- ⑪ S.-i. Katayama, A variation of Takagi's proof for quadratic reciprocity laws for Jacobi symbols, *Journal of Mathematics*, The University of Tokushima, 43(2009), 9-23, 査読無
- ⑫ Y. Motoda, T. Nakahara, S. I. A. Shah, T. Uehara, On a problem of Hasse, *RIMS Kokyuroku Bessatsu B12* (2009), 209-221, 査読有
- ⑬ T. Nakahara, Hasse's Problem for monogenic fields, *Annales Mathématiques Blaise Pascal*, 16(2009), 47-56, 査読無
- ⑭ T. Nakahara, S.-i. Katayama, S. I. A. Shah, M. N. Khalid and S. Badshah, Orbit of quadratic irrationals modulo p by the modular group, *Journal of Research Gomal University*, 25(2009), -, 査読有
- ⑮ K. Kimura, N. Terai, and K. Yoshida, Arithmetical rank of monomial ideals of deviation two, in ``Contemporary Mathematics Series 502 Combinatorial aspects of commutative algebra, (V. Ene and E. Miller eds.)'' Contemporary Mathematics Series 502, 2009 pp73-112, AMS, 査読有
- ⑯ K. Kimura, N. Terai, and K. Yoshida, Arithmetical rank of squarefree monomial ideals of small arithmetic degree, *Journal of Algebraic Combinatorics* 29(2009) 389-404, 査読有
- ⑰ N. Terai and K. Yoshida, Locally complete intersection Stanley-Reisner ideals, *Illinois Journal of Mathematics* 53(2009) 413-429, 査読有
- ⑱ S. Murai and N. Terai, H -vectors of simplicial complexes with Serre's conditions, *Mathematical Research Letters* 16(2009) 1015-1028, 査読有
- ⑲ H. Moon and Y. Taguchi, On the finiteness and non-existence of certain mod 2 Galois representations of quadratic fields, *Kyungpook Math. J.* 48 (2008), 323-330, 査読有
- ⑳ H. Moon and Y. Taguchi, The non-existence of certain mod 2 Galois representations of some small quadratic fields, *Proc. Japan Acad. Ser. A, Math. Sci.* 84 (2008), 63-67, 査読有
- 21 T. Hiranouchi and Y. Taguchi, Extensions of truncated discrete valuation rings, *Pure and Applied Mathematics Quarterly* 4; Jean-Pierre Serre special issue (2008), 1205-1214, 査読有
- 22 S.-i. Katayama, Some infinite series of Fibonacci numbers, *Journal of Mathematics*, The University of Tokushima, 43(2008), 912, 査読無
- 23 N. Terai and K. Yoshida, A note on Cohen-Macaulayness of Stanley-Reisner rings with Serre's condition (S_2) , *Communications in Algebra* 36(2008)

〔学会発表〕(計 32=24+8 件)

- ① 田口 雄一郎, 局所体の Galois 表現の合同とその大域的応用(招待講演), 岡山大学講演会, 2011年2月23日, 岡山
- ② 寺井 直樹, licci edge ideal について(招待講演), 第23回可換環論セミナー, 2011年2月1日, 山口県総合保健会館, 山口
- ③ アブドゥル ハミード, 中原 徹, シャーザッド アハマッド, サイエッド ハスネーヌ, ハッセの問題に関連する或る純8次体について, Workshop on Number Theory in Saga 2011 Winter, 2011年1月9日, 佐賀大学
- ④ 上原 健, 代数体の整数環からの符号の構成(招待講演), Workshop on Number Theory in Saga 2011 Winter, 2011年1月9日, 佐賀大学
- ⑤ 片山 眞一, べき乗位数をもつ有限単純群について (招待講演), Workshop on Number Theory in Saga 2011 Winter, 2011年1月8日, 佐賀大学
- ⑥ N. Terai and K. Yoshida, The second power of Stanley-Reisner ideals(招待講演), The 32nd Symposium on Commutative Algebra/The 6th Japan-Vietnam Joint Seminar on Commutative Algebra, 2010年12月15日, 葉山
- ⑦ S. Ahmad, T. Nakahara, S. Husnine and A. Hameed, On Monogeneity of Certain Pure Sextic Number Fields, Workshop on Number Theory in Saga 2010 Summer, 2010年8月13日, Saga University
- ⑧ N. Terai, Cohen-Macaulayness for ordinary and symbolic powers of edge ideals(招待講演), The first seminar on combinatorial commutative algebra, 2010年2月10日, Tehran (Iran)
- ⑨ 吉田 健一, 寺井 直樹, squarefree monomial ideal のべきについて(招待講演), 第22回可換環論セミナー, 2010年2月3日, 松本
- ⑩ T. Nakahara, Gauss sum and Jacobi sum attached to the sextic character of prime conductor, Workshop on Number Theory in Saga 2010, 2010年1月12日, Saga University
- ⑪ T. Nakahara, Monogenic cyclic sextic fields of prime conductor and gauss sum, Workshop on Number Theory in Saga 2009 Summer, 2009年8月4日, Saga University
- ⑫ T. Uehara, Integral basis of a certain type of cyclotomic fields(招待講演), Workshop on Number Theory in Saga 2009 Summer, 2009年8月4日, Saga University
- ⑬ Y. Taguchi, Extensions of truncated discrete valuation rings, Poster session at Journees de Geometrie Arithmetique de Rennes, Universite de Rennes 1, 6-10 Juillet 2009, France
- ⑭ 田口 雄一郎, 頂切離散附値環の分岐について(招待講演), 大岡山談話会, 2009.6.20, 東京工業大学
- ⑮ Y. Taguchi, Extensions of truncated discrete valuation rings, Modular Forms and Function Field Arithmetic(招待講演), a conference in honor of Jing Yu's 60th birthday, May 19--22, 2009, National Taiwan University, Taiwan
- ⑯ 田口 雄一郎, 楯円保型形式の合同とガロア表現 I, II(招待講演), 「保型形式の合同及び関連する話題」勉強会, 佐賀大学, 2009年2月20日~2月22日
- ⑰ Y. Taguchi, Extensions of truncated discrete valuation rings(招待講演), Pan Asian Number Theory Conference, 浦項工科大学校, 2009年1月8日-11日
- ⑱ Y. Taguchi, Groebner bases over truncated discrete valuation rings(招待講演), 1st POSTECH-Kyushu U. Joint Workshop, 浦項工科大学校, 2009年1月10日
- ⑲ T. Uehara, Integral Bases of the subfields of relative degree 2 in the n-th cyclotomic fields, Workshop on Number Theory in Saga 2009, 2009年1月7日, Saga University
- ⑳ T. Nakahara, Classification of monogenic cyclic quartic fields of even conductor, Workshop on Number Theory in Saga 2009, 2009年1月5日, Saga University
- 21 田口 雄一郎, ガロア表現の周辺 (招待講演), 北大数論幾何学セミナー (中村セミナー), 2008年12月23日-24日
- 22 田口 雄一郎, ガロア表現に関する Serre の保型性予想の紹介 I(招待講演), 「代数的整数論とその周辺」, 京都大学数理解析研究所, 2008年12月8日~12日
- 23 田口 雄一郎, 頂切離散附値環のガロア理論 (平之内俊郎氏との共同研究)(招待講演), ガロア理論とその周辺, 徳島大学, 2008年9月9日~12日
- 24 田口 雄一郎, 頂切離散附値環の拡大について(招待講演), 香川セミナー, 2008年7月12日

〔図書〕(計 1 件)

- ① 中原徹, 片山眞一, 小林孝行, 工藤愛知,

線形代数入門[国内大学生協より頒布], 学術図書出版社, 2010, Iv+ 174

[その他]

ホームページ等

<http://sc.hec.gov.pk/aphds/submit.asp?supid=3195>

<http://www2.math.kyushu-u.ac.jp/~taguchi/>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

中原 徹 (NAKAHARA TORU)

佐賀大学・名誉教授

研究者番号：50039278

(2) 研究分担者

上原 健 (UEHARA TSUYOSHI)

佐賀大学・大学院工学系研究科・教授

研究者番号：80093970

宮崎 誓 (MIYAZAKI CHIKASHI)

佐賀大学・大学院工学系研究科・教授

研究者番号：90229831

寺井 直樹 (TERAI NAOKI)

佐賀大学・文化教育学部・准教授

研究者番号：90259862

片山 眞一 (KATAYAMA, SHIN-ICHI)

徳島大学・総合科学部・教授

研究者番号：70194777

田口 雄一郎 (TAGUCHI YUUCHIRO)

九州大学・大学院数理学研究院・准教授

研究者番号：90231399

(3) 海外協力研究者

クロード ルベック (Claude Levesque)

ラバル大学・教授, Canada

金 賢光 (Kim HyunKuang)

POSTEC・教授, the Republic of Korea

サイエッド イナヤット アリ シャー
(Syed Inayat Ali Shah)

Islamia College University,
Peshawar・教授, the Islamic Republic
of Pakistan