様式 C-19

科学研究費補助金研究成果報告書

平成２３年４月２８日現在

機関番号：34419
研究種目：基盤研究（C）
研究期間：2008 ～ 2010
課題番号：20540032
研究課題名（和文）　応用数学に現れるゼータ関数の数論的および符号理論的研究

研究課題名（英文）　Number theoretic and coding theoretic study of zeta functions appearing in applied mathematics

研究代表者
知念　宏司（CHINEN KOJI）
近畿大学・理工学部・准教授
研究者番号：30419486

研究成果の概要（和文）：本研究で取り扱ったのは、符号のゼータ関数の理論の拡張である。考察の対象をマクウイリアムズ変換で不変なすべての多項式にまで広げた。さらに、実在の自己双対でない符号から、大量の不変式を系統的に作り出す方法を導入した。この方法を用いて、いくつかの有名な線型符号の系列から得られた不変式のリーマン予想を考察した。それらはMDS 符号、一般ハミング符号、非自己双対ゴレイ符号である。これらの一部は「完全符号」という族を形成する。われわれは、一般ハミング符号の一部の系列を除いて、これらの不変式がリーマン予想を満たすことを証明できた。

研究成果の概要（英文）：This project dealt with a generalization of the theory of zeta functions for linear codes. We extended the consideration to all the polynomials which were invariant under the MacWilliams transform. Moreover we introduced a method to produce many invariant polynomials systematically from the existing codes which were not self-dual. Using this method, we considered the Riemann hypothesis for invariant polynomials which were obtained from some famous families of linear codes. They were the MDS codes, general Hamming codes and non-self-dual Golay codes. Some of them form a family “perfect codes”. We could prove that, except for some sequences of the general Hamming codes, their invariant polynomials satisfied the Riemann hypothesis.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
2008 年度	1,000,000	300,000	1,300,000
2009 年度	700,000	210,000	910,000
2010 年度	600,000	180,000	780,000
年度			
年度			
総　計	2,300,000	690,000	2,990,000

研究分野：数物系科学
科研費の分科・細目：数学・代数学
キーワード：線型符号、完全符号、ゼータ関数、不変式環、リーマン予想。

１．研究開始当初の背景

(1) 線型符号のゼータ関数は 1999 年に Duursma によって導入された。これは符号の(ハミング)重み多項式の母関数である。符号のゼータ関数は代数曲線の合同ゼータ関数とよく似た性質を持つが、決定的に違う点もある。最も興味深いのはリーマン予想である。すべての合同ゼータ関数がリーマン予想を満たす代数曲線の場合と異なり、符号の ゼ

ータ関数には、リーマン予想が成立するもの、成立しないものの両方が存在する。概してよい符号はリーマン予想を満たすことが観察されており、「extremal code はリーマン予想を満たす」は正しいか、という問題も Duursma により提出されている。

符号のゼータ関数がリーマン予想を満たすための必要十分条件は、当時も現在も知られていない。また、Duursma による重要な結果は自己双対符号に関するもののみで、自己双対でない線型符号は、重要なものが多くあるにもかかわらず手つかずの状態であった。こうした状況下、研究代表者は、まずいくつかの解説論文（共著含む）によって Duursma の理論を初めて国内に紹介、さらに、符号の重み多項式以外の不変式にゼータ関数を定義し、そのリーマン予想を考察した初めての結果となる論文を出版した（２００６年)。詳しくいうと、formal weight enumerator と呼ばれる、II 型符号の重み多項式にきわめて近いが、実在の符号に対応しない不変式の系列を考察した。すると、通常の自己双対符号の場合と似た関数等式を満たすことが示され、やはりリーマン予想を考えることができることもわかった。さらに extremal という性質も II 型符号の重み多項式と同様に定義することができ、「extremal formal weigh enumerator はリーマン予想を満たす」ということが窺われる数値実験結果も得られた。

これらの結果は当時の日本の若手研究者にも影響を与え、いくつかの論文が出版されている。

２．研究の目的

(1) 符号のゼータ関数について、本研究課題の目的は、符号のゼータ関数に関して、そのリーマン予想成立のための必要十分条件を求めるという究極の目標を意識しつつ、自己双対でない符号から不変式を構成し、そのリーマン予想成立、不成立を調べ、符号あるいは不変式のリーマン予想がどのような意味をもつか調べることである。本研究の特色は、実在の符号の重み多項式以外の不変式にも考察の対象を広げる、という点にある。こうしてより広い視点から問題を眺めることにより、符号のゼータ関数の本質に迫ろうとするもので、これは独自のものであり、初めて自己双対でない符号から不変式とそのゼータ関数を構成する道を開くことにもなった。これで考察の対象を一挙に広げることができるため、より多くの不変式から情報を得ることを目的としている。

３．研究の方法

本研究では、まず考察の対象を、２変数多項式で、いわゆるマクウイリアムズ変換で不変であるようなもの全体とした。これは、そのゼータ関数が関数等式を持つための十分条件である。このような多項式の集合を選んだのは、関数等式を持つゼータ関数が、リーマン予想を考えるにあたって、最も妥当なものだからである。関数等式を持つ場合には、そのリーマン予想を、「ゼータ多項式（ゼータ関数の分子）のすべての根が、中心が原点で、半径が q の平方根の逆数である円周上にある」と定式化できる。ここで、q はマクウイリアムズ変換に現れるパラメータである。これは古くからある、代数曲線のゼータ関数のリーマン予想と形式上全く同じである。

これらのことから、以後このような２変数多項式を「不変式」と呼ぶことにする。なお、マクウイリアムズ変換におけるパラメータ q は、通常の符号理論では素数べきとするが、本研究では２以上の任意の自然数としてよい。

さて、条件を満たす不変式は豊富にあるが、闇雲にこれらを選び出してもゼータ関数の計算やリーマン予想の検証はうまく行かないことが予想される。つまり、扱いやすい性質の不変式を系統的に構成する方法が必要である。そこで本研究では、実在の符号の重み多項式を利用することを考えた。適当な符号の重み多項式と、その双対符号の重み多項式とを取ると、それらは定数倍を除いて、マクウイリアムズ変換で互いに移り合う。したがって、適当に係数を調整して、これら２つの重み多項式の１次結合を作ると、マクウイリアムズ変換を施したときに、それらが互いに移り合うことによって全体として不変になるような多項式が構成できる。これが本研究方法の基調となるアイデアである。最初に考える重み多項式は、どのような線型符号の重み多項式でもよいので、考察の対象はほぼすべての線型符号に拡大されたと言ってよい。ただし、自己双対な符号を取った場合には、従来の理論と全く同じになるので、自己双対でない符号の重み多項式を取ることが本質的である（ついでながら、このことにより、本研究は従来の理論のきわめて自然な拡張になっているとも言える)。代表的な線型符号の多くが無限系列を形成していることから、それらをもとに、大量の不変式を系統的に構成する方法が得られたわけである。

４．研究成果

上で述べた方法を、いくつかの符号の系列について適用し、それらの不変式のリーマン予想が成立するかどうかを調べたことが本研究の中心的結果である。結果として、非常

に幅広い範囲に、リーマン予想を満たす不変式が存在することがわかった。これはDuursma の研究からは予測できないもので、新しい方向を示すものとして注目される。今後これらのリーマン予想がどのような意味を持つのか、あるいは、不変式のリーマン予想が妥当性を持つ枠組みがどのようなものであるのか、解明が待たれる。結果は大きく分けて３つの部分からなるので、以下、順番にそれらを説明していく。

(1) まず、MDS 符号（最大距離分離符号）を取り上げた。これは、シングルトンの限界式において等号が成立するようなもので、実在する場合には非常によい符号である（２元符号では自明なものしか存在しないことが知られている）。また、ほとんどの場合において、自己双対ではない。具体的に言うと、体 F_q 上の MDS 符号が、符号長を n、最小距離を d としたとき、2≦d≦(n+1)/2 を満たすなら、この符号の重み多項式から作った不変式はリーマン予想を満たすことが証明された。

なお、条件 2≦d≦(n+1)/2 によって、可能なすべての場合がつくされていることに注意しておく。実際、2≦d は Duursma の理論からの要請で、符号のゼータ関数を考える場合には必ず仮定される条件である。さらに、d=n/2+1 のときは符号が自己双対となるのでこの場合を除外する。したがって d≦(n+1)/2 であるか、d≧(n+3)/2 である場合を考えればよいことになるが、MDS 符号はその双対符号も MDS となること、われわれの不変式構成法においては、互いに双対な１組の符号のうち一方のみを考えれば十分であることから、条件 d≦(n+1)/2 によって考え得るすべての場合が扱えているのである。

証明の方法であるが、MDS 符号に対しては、ゼータ多項式が定数 P(T)=1 となることを利用する。これにより、具体的に不変式のゼータ多項式を書き下すことができる。それは今の場合、1+q^(m/2)T^m(m:自然数)の形の多項式の定数倍で、非常に簡単な形になる。このことから容易に、すべての根が所定の円周上に存在することがわかる。

最後に、q の範囲について注意を述べる。通常の符号理論の文脈では q は素数べきであるが、MDS 符号の重み多項式は、形式的に 2 以上のすべての自然数に対して与えることができる。われわれの方法もそのような場合に通用するので、本結果においても、符号から離れて不変式の問題と考え、q は 2 以上の任意の自然数とするのが妥当である。

(2) 次に、一般ハミング符号について考える。これは有名な２元[7,4]ハミング符号を一般化したもので、任意の体 F_q に対して定義され、パラメータ［(q^r−1)/(q−1)=n,n−r,3]をもつ（r≧2)。また、任意の q,r に対して、自己双対でない符号となる。この符号とその双対符号を取って不変式を構成し、そのリーマン予想成立、不成立を調べてみた。その結果、r≧3 かつ q≧4 のとき、リーマン予想が成り立つことが証明された。この条件に当てはまる符号はもちろん無限個ある。証明の概略は次のようなものである。われわれの目的のためには、一般ハミング符号の双対符号の方が扱いやすい（重み多項式の項数が少ない）ため、そちらを中心にしてゼータ多項式を構成する。そして、得られたゼータ多項式にある種の変数変換を施して正規化し、リーマン予想が単位円周上の根の分布で記述できるようにする（リーマン予想成立と、正規化したゼータ多項式のすべての根が単位円周上にあることが同値)。すると、われわれの場合には、変換後のゼータ多項式は (i) 自己相反多項式である (ii) 係数は、定数項が最も大きく、以降中央の項に向かって単調に減少し、すべて 0 以上である、という、際立った特徴を持つことがわかった。そこで、この特徴をもつ多項式は、そのすべての根が単位円周上にある、ということを証明する、という方針を取った。これは、古典的に知られているエネストレーム・掛谷の定理の自己相反多項式への拡張とも言えるものである。証明には複素関数論が用いられ、これ自身もなかなか興味深い。

なお、r≦2 または q≦3 のときには、上で述べた特徴(i)、(ii)が成立しないため、リーマン予想を満たすことの証明が今のところできない。しかし、数値実験による観察では、これらの場合にもリーマン予想が満たされることは、かなり確からしいと思われる。

(3) 最後に、非自己双対ゴレイ符号について考える。これは、体 F_2 上の[23,12,7]符号と F_3 上の[11,6,5]符号の２種類がある。これらについても、その双対と組み合わせて不変式を構成すると、そのゼータ多項式はいずれもリーマン予想を満たすことが証明された。

証明には、Duursma が導入した“puncturing and averaging operator”P と “shortening and averaging operator”S を用いる。これらは、重み多項式あるいは重み多項式型の斉次多項式に作用する、ある種の微分作用素である。自己双対なゴレイ符号は、体 F_2 上の[24,12,8]符号と F_3 上の[12,6,6]符号の２種類があるが、これらの重み多項式にに作用素 P を施すと、それぞれ体 F_2 上の[23,12,7]ゴレイ符号と F_3 上の[11,6,5]ゴレイ符号が得られ、作用素 S を施すと、それぞれ体 F_2 上の[23,12,7]ゴレイ符号の双対符号と F_3 上の[11,6,5]ゴレイ符号の双対符号が得られる。このことと、P お

よびＳの作用によって、不変式のゼータ関数が不変に保たれることを利用する。実は、２つの自己双対ゴレイ符号がリーマン予想を満たすことは以前から知られているので、ここで扱っている不変式のリーマン予想は、自己双対ゴレイ符号のリーマン予想に帰着して証明することができるのである（零点が１つ加わる）。

最後に、以上の結果に関するもう一つの重要な注意がある。それは、本研究で扱った符号がすべて、MDS 符号あるいは「完全符号」という、よい性質を持つ符号である、ということである。MDS 符号についてはすでに述べた。完全符号とは、符号の最小距離をｄとするとき、空間 F_q^n の任意のベクトルが、ある符号語を中心とする半径[(d-1)/2]の球に含まれるようなものである。これは空間 F_q^n に、言わば誤り訂正のために無駄なベクトルがないということであり、その意味で効率のよい符号と言える。線型な完全符号はすべて求められており、(i)一般ハミング符号、(ii)非自己双対ゴレイ符号、あとは自明なものとして全空間と長さ奇数の繰り返し符号（これは MDS 符号となる）である。このように、性能のよい符号から本研究の方法で不変式を構成すると、それらがリーマン予想を満たすこと（一般ハミング符号の一部は予想だが）が示されたことは非常に興味深く、符号のゼータ関数の理論に新しい視点をもたらす可能性がある。今後この方向での新展開が期待される結果である。

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計３件）

①知念 宏司：一般 Hamming 符号から作られる不変式の Riemann 予想について，第８回「代数学と計算」研究集会報告集，査読無，2010,
ftp://tnt.math.metro-u.ac.jp/pub/ac/2009 で電子出版.

②知念 宏司：Distribution of the zeros of certain self-reciprocal polynomials, 京都大学数理解析研究所講究録，査読無，1665 巻，2009，9-16.

③Chinen, K.： An abundance of invariant polynomials satisfying the Riemann hypothesis, Discrete Math. 査読有，vol.308 (2008)，6426-6440.

〔学会発表〕（計５件）

①知念 宏司：Some topics in coding theory, Symposium on Quantum Information and Quantum Computing, 2011 年 3 月 12 日，近畿大学.

②知念 宏司：数論としての符号理論 － 符号のゼータ関数を中心に，数学系と情報系の符号理論研究者の交流会，2010 年 12 月 22 日，上智大学.

③知念 宏司：非自己双対 Golay 符号から作られる不変式の Riemann 予想について，ミニ集会「代数的組合せ論」，2010 年 3 月 18 日，神戸学院大学.

④知念 宏司：一般 Hamming 符号から作られる不変式の Riemann 予想について，第 8 回「代数学と計算」研究集会，2009 年 12 月 2 日，首都大学東京.

⑤知念 宏司：MDS 符号から作られる不変式の Riemann 予想について，日本応用数理学会 2009 年度年会，2009 年 9 月 30 日，大阪大学.

〔その他〕
ホームページ等

http://rais.itp.kindai.ac.jp/researchdb/

６．研究組織
(1)研究代表者
知念 宏司（CHINEN KOJI）
近畿大学・理工学部・准教授
研究者番号：30419486

(2)研究分担者
なし

(3)連携研究者
なし