様式Ｃ－１９

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

::平成２５年　６月　５日現在

機関番号：１３９０１
研究種目：基盤研究(C)
研究期間：2008　～　2012
課題番号：20540041
研究課題名（和文）
　一般微分・差分ガロア理論とその力学系への応用
研究課題名（英文）
　General Galois theory for differential and difference equations and its applications to dynamical systems

研究代表者
　梅村　浩（Umemura Hiroshi）
　名古屋大学・大学院多元数理科学研究科・名誉教授
　研究者番号：40022678

研究成果の概要（和文）：

（１）ガロア理論の同値性。
　一般微分ガロア理論には、Malgrange 理論（2001）と研究代表者によるもの(1996)がある。　前者は幾何学的であり、後者は代数的である。代数的にジェット空間のなす Lie groupoid を構成することにいより、　両者が同値の理論であることを示した。

（２）差分ガロア理論の提唱とその力学系への応用。
　差分方程式の一般ガロア理論を構成した。それを閉リーマン面上の離散力学系に応用して、閉リーマン面上の力学系でガロア群が有限次元であるものを決定した。　それらの力学系のガロア群は可解であるので、閉リーマン面上の離散力学系で可積分なものを決定したと言ってもよい。

（３）ガロア理論の量子化。
　研究代表者の学生であった F. Heiderich は我々の一般ガロア理論が微分方程式や差分方程式のみならず、一般の Hopf 代数の作用に関する関数方程式にまで拡張できることを発見した。この理論を具体的に意味付ける研究を開始し、成果を上げ始めている。

研究成果の概要（英文）：

(1) Equivalence of Galois theories.
We had two general differential Galois theories: (a) Malgrange's theory proposed in 2001 and (b) ours in 1996. The first is geometric and the second is algebraic. We proved that these two theories are equivalent by algebraic construction of the jet space and thus Lie groupoid of automorphisms.

(2) Construction of general Galois theory for difference equations and its applications to dynamical systems.
We succeeded in constructing general difference Galois theory for difference equations. An elegant application of the theory is discrete dynamical systems on compact Riemann surfaces. In fact, we can determine all the discrete dynamical systems on compact Riemann surfaces that have finite dimensional Galois groups. Since the Galois group of these systems are solvable, we may say we have determined all the integrable discrete dynamical systems on compact Riemann surfaces,.

(3) Quantization of differential Galois theory

Our student F.Heiderich discovered that we can generalize our Galois theory beyond difference and differenctial framework. He suggests that we can establish a similar theory for functuinal equations with respect to operators, The most fascinating feature of this view point is we may quantizeGalois theory. We started a irst research in this directions exploiting examples.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
2008 年度	600,000	180,000	780,000
2009 年度	500,000	150,000	650,000
2010 年度	500,000	150,000	650,000
2011 年度	500,000	150,000	650,000
2012 年度	500,000	150,000	650,000
総　計	2,600,000	780,000	3,380,000

研究分野：数物系科学
科研費の分科・細目：数学･代数学
キーワード：代数学、解析学、関数方程式、幾何学

１． 研究開始当初の背景

微分方程式についてのガロア理論を成するのは、１９世紀にさかのぼる懸案であった。既に Galois はその可能性を予期していた。具体的に、それを実現しようと考えたのは S.Lie である。

微分方程式のガロア理論は一般に無限次元の理論であって、有限次元の Lie 群、論、Lie 監論さえ存在しなかった当時には、大変困難な問題であった。

1890 年代になると Picard は線形常微分方程式のガロア理論を提出した。これは、問題解決への重要な第一歩であったが、有限次元の理論であった。

１９世紀の終に Drach は初めて一般の、したがって無限次元の理論を提出した。しか、この理論は、不完全であった。この Drach の理論を完全にするのに、Vessiot は一生を捧げた。

この分野は 20 正規の初頭まで盛んに研究されたが、問題が困難なこともあって、その後研究されなくなり、ついには放棄されてしまった。

1996 年に研究代表者が発表した論文で、この分野は再び研究者の注目をあびるようになってきていた。我々の仕事に刺激され、Malgrange は彼の長年の微分方程式の研究に基づき独自の理論を、2001 年に提出した。

２．研究の目的

我々の理論は微分拡大体に無限次元の代数群を対応させる理論であり、Malgrange の理論は多様体上の葉層に Lie 擬群を対応させる理論である。Malgrange は Elie Cartan の幾何学を念頭に置いている。

Vessiot と E.Cartan は同時代のパリで活躍し、研究の主題も近かったが研究上の交流はなかった。　我々の理論とこれらの理論を結びつける。Casale の第 6 Painleve 方程式の結果を我々の枠組みの中で理解する。Picard 解は非古典的であるがガロア群は有限次元になる。このような現象は一般ガロア理論を用いてのみ観測でしる。

従来の力学系の可積分性についての理論は、その線形化に Picard-Vessiot 理論を応用することによってなされてきた。無限次元微分ガロア理論を力学系の可積分性の問題に、直接使う。一方、代数微分方程式論のもっとも重要な応用である、Manin による代数関数体上の Mordellc 予想の証明が示すように、代数微分方程式論は算術的不定方程式論と深く関わっている。差分方程式のガロア理論を完成し、離散力学系の算術的側面を研究す

る。

３．研究の方法

本研究は多岐にわたって、様々な分野とかかわっている。　具体的には、

(a)代数学の諸分野、代数幾何学、微分代数学。
(b)可積分系の理論、古典力学系、
(c)離散力学系、ソリトン方程式論。
(d)力学系の算術的研究。
(e)古典に残されたアイディアの追求。

これらに関して、フランス、ポーランド、カナダ、アメリカ、スペイン，日本での研究集会に招待され講演を行った。また、その場で世界各国の研究者と議論をした。

筑波大学のHopfガロア理論の専門家を訪問して議論をした。神戸大学の野海正俊教授を訪問し超幾何微分方程式の量子化について討論した。

名古屋大学で毎週「代数幾何学・微分方程式」のセミナーを開催した。そこで取り上げた主題は､離散化されたBurgersm方程式、特殊化におけるガロア群の振る舞い、ガロア理論の量子化の試み、量子群、ガロア理論から見たソリトン方程式論等であった。

４．研究成果

Malgrange の微分ガロア理論と我々の微分ガロア理論との同値性を、ジェット空間を代数的に構成することによって証明した。

さらに一般差分ガロア理論を提唱した。その具体的な応用として、閉リーマン面上の離散力学系でガロア群が有限次元のものを分類した。これらの力学系のガロア群は可解でもあるので、可解なガロア群をもつリーマン面上の離散力学系を決定したということもできる。別の言い方をすれば、リーマン面上の離散力学系で可積分なものを決定したことになる。

力学系の算術的研究では、可積分系の例であるBurgers方程式を研究した。即ち、２個の元からなる有限体上でBurgers方程式を考えると、きれいなパターンを作り出すことを発見した。

２００８年に研究代表者の学生であったF.Heiderich は線形微分方程式、線形差分方程式のガロア理論（Picard-Vessiot理論）を統一的に扱う Hopf ガロア理論のアイディアが、非線形方程式にも応用できることを発見した。この発見は重要であって、ガロア理論の量子化を示唆している。この点について二つの方向の研究をした。
一つは可換環に作用する作用素が強い非可換性を持つば合である。もう一つは非可換環上の線形方程式である。これらの試みは現在進行中である。

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕(計　８件)

(1) Umemura Hiroshi,
Sur l’éequivalence des théories de Galois différentielles générals. C. R. Math. Acad. Sci. Paris 346 (2008), 21-22, 1155-1158.（査読有）

(2) Morikawa, Shuji, Umemura Hiroshi,
On a general difference Galois theory. II. Ann. Inst Fourier (Grenoble) 59 (2009), 2733-2771. （査読有）

(3) Umemura Hiroshi,
On the definition of Galois groupoid. Astérisque 323 (2009),441-452.（査読有）

(4) Kawahira Tomoki,
Tessellation and Lyubich-Minsky laminations associated with quadratic maps II. Topological structures of 3-laminations, Comform. Geom. Dyn. 13(2009). 6-75. （査読有）

(5) Kawahira Tomoki,
Tessellation and Lyubich-Minsky laminations associated with quadratic maps I. Pinching semicomjugacies. Ergodic theory Dynam. Systems 29 (2009),2, 579-612.（査読有）

(6) Morikawa Shuji, Saito Katsunori, Takeuchi Taihei, Umemura Hiroshi,
Discrete Burgers equation, Binomial coefficients and Mandala,
Mathematics in computer Science, 4 (2010),
151-167. （査読有）

(7) Kawahira Tomoki,
Topology of the regular part for

infinitely renormalizable quadratic polynomials,
Fund. Math. 208 (2010), 35-56. (査読有)

(8) Umemura, Hiroshi,
PIcard-Vessiot theory in general Galois theory, Algebraic Methods in Dynamical Systems, Banach Center of publ. 94, Polish Acad, Sci. (2011) 263-293.. (査読有)

〔学会発表〕(計 7 件)

(1) Umemura Hiroshi,
General differential Galois theory,
Symbolic Analysis Workshop, June 26, 2008, Hong Kong City University, Hong Kong, China.

(2) Umemura Hiroshi,
Discrete Burgers' equation, Binomial coefficients and Mandala,
Applications of Computer Algebra. June 26 2009, Ecole Polytechnique, Montreal Canada.

(3) Umemura Hiroshi,
Théorie de Galois différentielle générale; Compariasons et applications, Journée Galois différential non-linéaire, November 27, 2009, Institut de Mathématiwue a Jussieu. Universite de Paris, Paris France.

(3) Umemura Hiroshi,
Soliton theory of Sato is Abelian,
Algebraic methods in Dynamical systems,
May 20 2010, Institute of Mathematics Conference centre,
Bedlewo, Poland.

(4) Umemura Hiroshi,
Picard-Vessiot theory in general differential Galois theory September 8, 2010, Barcelona University Barcelona, Spain.

(5) Umemura Hiroshi,
Soloton theory is Abelian, June 2011, Houston, Texsas U,S,A.

(6) Umemura Hiroshi,
General differential Galois theory, Bicentenaire de Galois, October 2011, IHES, Paris France.

(7) Umemura Hiroshi,
Can we quantize differential Galois theory? Deceber 2012, Kyoto University Kyoto, Japan.

〔図書〕(計　１件)

(1) 梅村 浩
ガロア　偉大なる曖昧さの理論，現代数学社、2011。

［産業財産権］なし。

６．研究組織

(1)研究代表者
梅村　浩　(Umemura Hiroshi)
名古屋大学･大学院多元数理科学研究科・名誉教授
研究者番号：40022678

(2)研究分担者
川平　友規 (Kawahira Tomoki)
名古屋大学･大学院多元数理科学研究科・准教授
研究者番号：50377975