

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成 24 年 5 月 24 日現在

機関番号：14301

研究種目：基盤研究 (C)

研究期間：2008 ～ 2011

課題番号：20540073

研究課題名（和文）リーマン面の退化族の幾何

研究課題名（英文）Geometry of Degenerations of Riemann Surfaces

研究代表者

高村 茂 (TAKAMURA SHIGERU)

京都大学大学院理学研究科准教授

研究者番号：20362436

研究成果の概要（和文）：リーマン面の退化族を、低次元トポロジー、代数幾何学、特異点論へ有機的に結びつけて考察した。具体的には、特異点の解消空間の上の正則写像の詳細な研究を行い、さらに臨界集合のまわりのモノドロミーを円周作用を使って記述した。その上で、標準射影を導入し、その描写と応用を与えた。また、京都大学の佐々木建祀郎氏と共にこの結果の一部を高次元化し、A 型特異点を巡回群作用で割って得られた特異点が、スモール群によって一意化されることを示した。この結果は共著論文にまとめた。

研究成果の概要（英文）：We studied degenerations of Riemann surfaces from the viewpoint of low-dimensional topology, algebraic geometry and singular theory. We described holomorphic maps on resolution spaces and described circle actions around the critical sets. We applied these descriptions to those of topological monodromies. Moreover, we generalized a part of these results to the higher-dimensional case. We proved that the quotient of A-singularity under a cyclic group action is uniformized by a small group.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2008 年度	900,000	270,000	1,170,000
2009 年度	800,000	240,000	1,040,000
2010 年度	800,000	240,000	1,040,000
2011 年度	800,000	240,000	1,040,000
年度			
総計	3,300,000	990,000	4,290,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・幾何学

キーワード：リーマン面・分裂変形・複素曲面・特異点・モノドロミー

1. 研究開始当初の背景

リーマン面の退化が与えられたとき、変形を通じて「特異ファイバーの分裂」という概念が定義される。

リードは1990年ごろ、まったく分裂しない特異ファイバーを原子ファイバーと名づけ、それらの分類を行なうことを提唱し、ま

た種数3の原子ファイバーのリストを予想した。

歴史的には、種数1, 2の退化に対する原子ファイバーの分類は、それぞれモイシェゾン、堀川により1977年および1988年になされている。

一方、足利と荒川は1998年に種数3の超

楕円的リーマン面の退化の場合に、原子ファイバーの候補をリストアップしている。

リーマン面の退化族の特異ファイバーのうち、変形に関して最も安定なもの、すなわち原子ファイバーの分類問題は代数幾何のみならず、特異点理論、関数論、および低次元トポロジーとも密接に関係し、幅広い応用もつことが期待され、明白な重要性を持つにもかかわらず、いまだ極めて特殊な場合にしか手がつけられていないのが実情である。実際、まとまった結果がえられているのはリーマン面が超楕円的な場合のみである。(注：種数1, 2のリーマン面はすべて超楕円的)

2. 研究の目的

(1)

原子ファイバーの分類を目標とする。同時に、原子ファイバーの確定に欠かすことのできない分裂族のモジュライ空間の構成を企図する。

(2)

私が最近発展させつつある分裂族の構成の2つの方法は、今までとは全く別のアプローチで分裂族の構成を与える。1つは特異ファイバーの部分因子に着目するもので、もう1つは正則ベクトル束の切断を使うものである。今後の課題は、この研究方向をさらに発展させ、分裂族のモジュライの構成に応用することである。分裂族のモジュライが構成できればさまざまな応用が期待できる。たとえば、与えられた特異ファイバーが原子ファイバーであるための必要十分条件を得ることができる。また、与えられた特異ファイバーがどのような分裂を許容するか調べることが可能となるばかりでなく、モノドロミーの分解という写像類群の問題への応用も見込める。

(3)

モイシェゾン、堀川、足利、荒川らの原子ファイバーの研究で用いられた手法は、退化を2重分岐被覆として実現し、分岐リーマン面の変形により分裂族を構成するものであった。残念ながら、この手法が適用できるのは超楕円的リーマン面の退化の場合に限られており、種数3の退化に限っても非超楕円的リーマン面の退化の場合には無力であった。私が発展させつつある方法論は、はじめて超楕円的リーマン面以外の退化の場合に適用できる画期的な手法である。

3. 研究の方法

(1) 代数幾何的立場

分裂族は複素曲面族とも解釈できるので、3次元代数多様体の極小モデル理論との関係から、原子ファイバーを特徴付けられないかさらに探っていきたい。また、特異ファイバーはほとんどの場合、商特異点の例外集合を含んでいるが、分裂族は必然的に特異点解消空間の変形を誘導するので、特異点の変形と原子ファイバーの深い関係が示唆される。特異点理論の立場からの原子ファイバーの特徴づけが可能かどうかを見極めたい。

(2) トポロジー的立場

分裂族が与えられると、もとの退化のモノドロミーが(分裂した特異ファイバーのまわりの)モノドロミーの積に分解される。これはリーマン面の写像類群の元の分解を与えていると解釈できるので、写像類群の群論的性質から原子ファイバーについてなにか言えないかを考察したい。また、モジュライ写像を通じて、分裂族はモジュライ空間の「局所的な幾何」を反映していると考えられるので、モジュライ空間の幾何的研究と結び付けられないか研究を進めたい。

(2)に関して、京都大学の佐々木建祀郎氏と、A型特異点の巡回商のスマール群による一意化定理を証明し、結果を共著論文にまとめた。また、九州大学の奥田喬之氏と頻繁にコンタクトを取りながら研究を進めている。さて、私が今まで発展させてきた判定法は特異ファイバーから「剥がすことのできる部分因子」を見い出して構成するものであるが、この方法と3次元代数多様体の極小モデル理論との関係をこの分野の専門家と連絡をとりつつ研究を進めたい。

また、(2)のトポロジーの観点からは、学習院大の松本 幸夫氏をはじめとする東京のモジュライ空間および写像類群の研究グループと研究連絡をとりながらさらに研究を進めたい。更に、退化がひとつ与えられたとき、位相的に異なる分裂族はどれくらいあるかという自然な問題にもアプローチしたい。この問題は最も単純な種数1の退化の場合でも未解決であるが、最近の私の研究により位相的に異なる分裂族は「想像するよりもはるかにたくさんある」ことが分かってきた。では、どうやってすべてを数え上げればよいか？

残念ながら、現在はまだデータを積み重ねている段階であるが、この問題に対しても低次元トポロジーと代数幾何との境界領域の研究者と交流を行ないながら研究を進めたい。

以上は「純粋数学的アプローチ」であるが、これとは別に分裂族の存在についての計算機実験も積み重ねていきたい。

具体的には、

- ・私の研究で、特異ファイバーから「剥がすことのできる部分因子」を見つけることは、低種数の場合には、ほとんど組合せ的な議論で決まってしまうので、剥がすことのできる特異ファイバーの部分因子を見つける計算機のプログラムを作って原子ファイバーの候補を取り出すこと。

- ・また、分裂族において、特異ファイバーがどのように分裂していくかをコンピューターグラフィックスで描けないか、などが課題として挙げられる。

この方面は、トポロジーへの計算機の応用で実績がある明治大の阿原 一志氏と研究連絡をとった。彼によりスプリティカというソフトが開発されたが、分裂族のさらなる新しい現象を発見するために、こういったソフトを開発することは意義があると思う。

また、研究計画の遂行に必要な参考図書（代数幾何学およびトポロジー関連）をそろえ活用した。

(3) さらに、分裂族のモジュライ空間「分裂モジュライ」の構成に向けて精力的に研究をすすめた。この「分裂モジュライ」は今まで知られているあらゆるモジュライ空間とは異なった様相を呈する。

ほかのモジュライ空間（たとえばリーマン面のモジュライ空間やベクトル束のモジュライ空間）がひとつの複素解析空間として構成されるのに対し、「分裂モジュライ」は（もし構成されるとしたら）複素解析空間の族として構成されるべきものである。

このためには、まったくあたらしいアイデアが要求されるとともに、広範な数学知が必要となってくる。

そのため、以前にもまして、広範な分野の研究者と研究連絡をとる必要がある。

また、「分裂モジュライ」をしらべることにより、与えられた退化がどのような分裂を許容するかが原理的に計算可能となるはずなので、低種数の場合にぜひとも計算してみたい。その結果なんらかの新しい知見がえられるのでは、と期待している。

さらに、このことは退化のモノドロミーが、写像類群の元としてどういう分解を許容す

るかという問いかけに幾何の観点から回答を与えることを可能とする極めて重要な問題にかかわっている。是非とも写像類群の専門家である佐賀大の広瀬進氏や大阪大の遠藤久顕氏らと研究連絡を密接にとりつつさらに研究をすすめていきたい。

なお一層困難だが魅惑的な問題は、（今の段階では、ごく抽象的な言い方にとどまってしまうが）「分裂モジュライ」の「解析的な複雑さ」と、モノドロミーの写像類群の元としての「組み合わせ的な複雑さ」を結びつける何らかの原理を見いだすことである。

これに対しては、両サイドの専門家の知恵を活かす必要がある。さらに積極的な研究交流を図っていきたい。

4. 研究成果

著作「複素曲線の退化族の幾何学」を完成させた。これにより低次元トポロジー、代数幾何学、特異点論がどのように有機的に関連してリーマン面の退化族と結びついているかがはっきりわかるようになったと思う。具体的には、特異点の解消空間の上の正則写像の詳細な研究を行い、さらに臨界集合のまわりのモノドロミーを円周作用を使って記述した。その上で、標準射影（特異ファイバーのコアへの正則写像）を導入し、その描写と応用を与えた。これらはあくまで局所理論であるが、総合的に統合し、大局理論として打ち立てた。

また、特異点を巡回群作用または2面体群作用で割って得られた商空間は、特異点をもつが、この特異点がリーマン面の退化族の研究で果たす役割も解明した。このような特異点では初めに予想していた様な「悪い」特異点ではなく、巡回商特異点や2面体商特異点の立場から説明できることがわかった。

今後の課題である分裂族のモジュライ空間の構成のうえで、これらの特異点の解消空間の変形理論（いわゆるアルティン成分）上に正則写像を構成することが本質的なので、さらに考察を深めていきたい。また、このたび完成させた「複素曲線の退化族の幾何学」は、すでにシュプリンガー社から出版した前作「複素曲線の退化族の分裂変形」と併せて、この分野の基本的かつ今後必要となる道具を提供すると期待している。

われわれの結果は、ある種の複素曲面の符号数をアティヤ・シンガー符号数定理を用いて計算するときに利用された。

5. 主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者に

は下線)

[雑誌論文] (計 2 件)

- ① K. Ahara, and S. Takamura, Splittability of stellar singular fibers with three branches, Tokyo J. Math. 29 p1-17 (2006)
- ② S. Takamura, Towards the Classification of Atoms of Degenerations, I (Splitting Criteria via Configurations of Singular Fibers), J. Math. Soc. Japan 56 (1) p115-145 (2004)

[学会発表] (計 3 件)

- ① 高村茂、佐々木建祀郎
2012 年 1 月 19 日(木) - 21 日(土) 鹿児島大学理学部大会議室
「接触構造・特異点・微分方程式およびその周辺」
世話人(合田洋, 松田浩, 三松佳彦, 宮嶋公夫)
「Singularities, monodromies and uniformization」1 月 19 日
- ② 高村茂
2009 年 3 月 9 日(月) - 12 日(木) 広島大学数学教室
「Branched Coverings, Degenerations, and Related Topics」
主催者(松本幸夫, 足利正, 作間誠, 徳永浩雄, 島田伊知朗)
「Singular fibers of degenerations of Riemann surfaces」3 月 12 日
- ③ 高村茂
2006 年 1 月 29 日 小田急箱根レイクホテル
「分裂族、モノドロミー、チャート 箱根セミナー06」
世話人(松本幸夫)
「Canonical projection of degenerations」

[図書] (計 1 件)

- ① S. Takamura, Towards the classification of atoms of degenerations, III (Splitting Deformations of Degenerations of Complex Curves), Springer Lecture Notes in Math. 1886 (2006) 590 ページ

6. 研究組織
(1) 研究代表者

高村 茂 (TAKAMURA SHIGERU)
京都大学・大学院理学研究科・准教授
研究者番号: 16540062

(2) 研究分担者
()

研究者番号:

(3) 連携研究者
()

研究者番号: