

機関番号：34528

研究種目：基盤研究(c)

研究期間：2008～2010

課題番号：20540099

研究課題名(和文) 例外リー群の特性類と Chow 代数に関する研究

研究課題名(英文) On the characteristic classes and The Chow ring of the exceptional Lie groups

研究代表者

西本 哲 (NISHIMOTO TETSU)

近畿医療福祉大学・社会福祉学部・准教授

研究者番号：80330520

研究成果の概要(和文)：例外 Lie 群の分類空間のコホモロジーの環構造，コホモロジー作用素の作用，表現から誘導される特性類を決定するため，数式処理システムを用いたプログラムを作成した．そのプログラムを使用して，いくつかの例外 Lie 群の分類空間のコホモロジーを決定した．

研究成果の概要(英文)：In order to determine the cohomology of the classifying space of the exceptional Lie group, the action of the cohomology operation and the characteristic classes induced by the representation, we made some programs using some computer algebra system. We compute the cohomology of the classifying space of some exceptional Lie groups applying the programs.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2008 年度	1,000,000	300,000	1,300,000
2009 年度	800,000	240,000	1,040,000
2010 年度	800,000	240,000	1,040,000
年度			
年度			
総計	2,600,000	780,000	3,380,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・幾何学

キーワード：トポロジー、リー群

## 1. 研究開始当初の背景

Lie 群  $G$  の分類空間  $BG$  のコホモロジーについては，直交群やユニタリ群などの古典群の場合，Stiefel-Whitney 類，Chern 類などとして，よく知られている．一般に Lie 群  $G$  が  $p$ -torsion を持たない場合，その分類空間  $BG$  の  $\text{mod } p$  コホモロジーは多項式環になることが知られているが， $p$ -torsion を持つ場合はどうなるか簡単には判らない場合が多い．スピノール群は  $2$ -torsion を持つが，Quillen によりスピノール群の  $\text{mod } 2$  コホモロジーは完全に決定された．コンパクト単連結例外リー群は， $G_2$ ,  $F_4$ ,  $E_6$ ,  $E_7$ ,  $E_8$  の 5

種類あり， $G_2$  の場合は  $2$ -torsion， $F_4$ ,  $E_6$ ,  $E_7$  の場合は  $2$ -torsion と  $3$ -torsion， $E_8$  の場合は  $2$ ,  $3$ ,  $5$ -torsion を持っていることが知られている．階数の低い  $G_2$ ,  $F_4$  の特性類は，A.Borel および H.Toda により良く知られている． $E_6$ ,  $E_7$ ,  $E_8$  については A. Kono, M. Mimura, N. Shimada, Y. Sambe により部分的な結果が知られているが，良くわかっていないことも多かった．

## 2. 研究の目的

$E_6$  の分類空間  $BE_6$  の  $\text{mod } 2$  コホモロジーについてはすでに知られているので，それ以外

の  $p$ -torsion を持つ場合の  $E_6$ ,  $E_7$ ,  $E_8$  の分類空間の  $\text{mod } p$  コホモロジーの環構造を決定することが目的である。そのため、生成元の決定、コホモロジー作用素の作用の仕方の決定、それから表現から誘導される特性類が決定されることが必要であり、そのことも目的の一つである。更にこの結果を Chow 代数の研究へ応用していくことも目的の一つであった。

### 3. 研究の方法

(1) Lie 群  $G$  の分類空間  $BG$  のコホモロジーに収束する Rothenberg–Steenrod スペクトル系列を計算し、そこから必要な情報を取り出してくる。スペクトル系列の  $E_\infty$ -項は分類空間のコホモロジーへ自然に入るフィルトレーションに伴う次数付代数と同型であるので、どこに分類空間のコホモロジーの生成元や関係式があるのかはほぼわかる。また、スペクトル系列からコホモロジー作用素の情報もかなり得ることができる。

(2) リー群  $G$  の部分群として最も重要なものに極大トーラスがある。リー群  $G$  の分類空間  $BG$  のコホモロジーから極大トーラスの分類空間のコホモロジーの Weyl 群不変量への準同型を決定する。また、それ以外の部分群の分類空間へのコホモロジーへの準同型を決定する。それにより、例外リー群の分類空間のコホモロジーの関係式などの情報を引き出す。

(3) 例外リー群の表現から誘導される特性類、Stiefel–Whitney 類、Chern 類などを決定していく。生成元のいくつかは、この特性類を用いて定義できる場合があるので、これを調べるのは重要である。

(4) これらの手法を用いて例外 Lie 群の分類空間のコホモロジーを決定していくが、計算量が多いので数式処理システムを使って計算していく。

### 4. 研究成果

(1) コホモロジーの計算に必要な数式処理システムを用いるためのプログラムを作成した。mod 2 コホモロジーの場合は数式処理システム Risa/Asir を用いたが、 $p$  が奇素数の場合はコホモロジー環が次数付可換になるので、数式処理システム Singular を用いた。これにより、表現から誘導される特性類、コホモロジー作用素の作用の仕方、関係式などが早く計算できるようになった。

(2) いくつかの Lie 群の分類空間のコホモロジーを計算した。その中で重要なものは

① 例外リー群  $F_4$  の分類空間  $BF_4$  の整係数コホモロジーの torsion free 部分の決定を Weyl 群不変量の形での決定

② 例外リー群  $E_6$  の分類空間  $BE_6$  の mod 3 コホモロジーの決定

である。

### 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 1 件)

Masaki Nakagawa, The integral cohomology ring of  $E_6/T$ . Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci. vol.86 (2010) 64–68, 査読有

[学会発表] (計 2 件)

西本 哲: ”Lusternik–Schnirelmann  $\pi_1$ -category of non-simply connected Lie groups” 日本数学会, (20090328), 東京大学

西本 哲: ”On the Lusternik–Schnirelmann category of Stiefel manifolds” International Conference on Algebraic and Geometric Topology, (20100629), Capital Normal University in Beijing

[図書] (計 0 件)

[産業財産権]

○出願状況 (計 0 件)

名称：  
発明者：  
権利者：  
種類：  
番号：  
出願年月日：  
国内外の別：

○取得状況 (計 0 件)

名称：  
発明者：  
権利者：  
種類：  
番号：  
取得年月日：  
国内外の別：

[その他]

### 6. 研究組織

(1) 研究代表者

西本 哲 (NISHIMOTO TETSU)

近畿医療福祉大学・社会福祉学部・准教授  
研究者番号：80330520

(2)研究分担者

(3)連携研究者

三村 護 (MIMURA MAMORU)

岡山大学・理学部・名誉教授

研究者番号：70026772

中川 征樹 (NAKAGAWA MASAKI)

香川高等専門学校・一般教育科・講師

研究者番号：50370036