

機関番号：12613

研究種目：基盤研究（C）

研究期間：2008～2010

課題番号：20540110

研究課題名（和文） 無限分解可能分布論とその応用

研究課題名（英文） Theory of infinitely divisible distributions and its application

研究代表者

藤田 岳彦 (FUJITA TAKAHIKO)

一橋大学・大学院商学研究科・教授

研究者番号：50144316

研究成果の概要（和文）：

リーマンゼータ関数の特殊値をいろいろな確率論的方法で求めることに成功した。それについていろいろな国内国外での研究会で報告を行った。また、カタストロフィオプション、離散 HJB 方程式に関する研究を行った。また、エキゾチックなストックオプションに関する研究を行った。さらに p 進整数に関するヴァンデルコルプト列の研究を行った。

研究成果の概要（英文）：

Special values of the Riemann zeta function are evaluated by various probabilistic methods. These results were reported at the various domestic and international symposium. We investigated pricing of catastrophe options and discrete HJB equation. Exotic stock options are investigated. Also Van der Corut sequence in p -adic integers are researched.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合計
2008年度	1,100,000	330,000	1,430,000
2009年度	1,000,000	300,000	1,300,000
2010年度	900,000	270,000	1,170,000
総計	3,000,000	900,000	3,900,000

研究分野：確率論、数理ファイナンス、保険数理

科研費の分科・細目：数学・数学一般（含確率論・統計数学）

キーワード：コーシー分布、逆正弦分布、指数分布、ウィグナー分布、リーマンゼータ関数、バーゼル問題、フルビッツゼータ関数、オイラー公式

1. 研究開始当初の背景

無限分解可能分布は独立な確率変数の任意個の和で表される確率変数の分布という確率論における基本的な対象のひとつである。その無限分解可能分布を、純粋数学・応用数学（数理ファイナンス）の両方に応用することを考えた。まず、パリ大学のヨール教授との共同研究で、二つの独立なコーシー分布の商を考えることにより、リーマ

ンゼータ関数の特殊値（バーゼルプロブレムやオイラー公式）を得ることに成功していた（2007年）。筆者は、他の確率分布を用いたり、やや別の解析、確率論的な方法でも、同様な研究ができると予想し、本研究の柱と定めた。また、応用数学への応用としては数理ファイナンスにおけるレヴィ市場（ジャンプがある場合の資産過程）のもとでの価格理論の研究を行う予定であった。というの

は レヴィ過程による資産過程の確率分布は無限分解可能分布そのものであり、いろいろな無限分解可能分布論の応用として価格理論を研究する予定で新しい金融商品の開発を通じて「金融工学」、「数理ファイナンス」の両方にとってまた、その価格理論の分析を通じて「数学」「確率論」の両方に有意義な研究を遂行する予定であった。

また、筆者が前に構築した離散確率解析を用いて保険数理、金融数理への応用ができると考えていたのでこれに関しても研究を行う予定であった。

また、前に研究した多次元のナンバーシステムを用いたヴァンデルコルプト列の構成とその数値積分への適用に関する論文のさらなる発展研究も遂行する予定であった。

2. 研究の目的

確率論は物理、生物、社会科学への応用だけでなく、純粋数学そのものにも応用できる守備範囲に広い数学の分野である。実際、確率論的な方法で数論と深いつながりのあるリーマンゼータ関数の特殊値を求めることができた。さらなる、確率論とリーマンゼータ関数の関連研究が期待され、確率論と数論の深いつながりの端緒が開ける。

また、確率論の社会科学の応用として「金融工学」、「数理ファイナンス」、「保険数理」があげられるが、筆者はとくに新しい実務的にも意味のある金融商品の開発とそれ価格理論に関連する確率論の研究を遂行した。従来の金融商品の欠点をカバーする新しい金融商品を開発することで、金融実務にも貢献し、その価格理論を開発する際に確率論の新しい結果が必要となりいわゆる「純粋数学」にも研究となりうる。また、筆者が以前構築した離散確率解析の手法を「金融工学」、「数理ファイナンス」、「保険数理」に取り入れる研究も重要だと思われる。見通しがよくなり、理論自身も簡明で数学教育、ファイナンス教育の立場から見ても離散モデルに離散確率解析を適用することは、厳密な確率論、確率解析を必要とせず、わかりやすくもっと多くの人々が理解を深めることができる。

3. 研究の方法

まず、最初のリーマンゼータ関数と確率論に関する研究であるが、コーシー分布、逆正

弦分布、指数分布、ウィグナー分布などの独立な二つの商を考えその密度関数を計算し全空間で積分すると1であることよりリーマンゼータ関数の2における値が $\pi^2/6$ であること(バーゼル問題)が解け、さら対数を取り偶数次モーメントとメルリン変換を考えそれを二通りに考えると、オイラー公式も導き出せる。

また、類似の方法でフルビッツゼータに関する特殊値も求められることを京都大学の矢野裕子助教との共同研究により見つけた。ルジャンドル多項式の母関数に関するパーシバル公式を考えてもバーゼル問題が解けることを見つけた。これらのすべては従来のもよりもかなり簡明な方法である。

また、2番目の「金融工学」、「数理ファイナンス」への確率論(とくに無限分解可能分布論)の応用であるが、これに関しては、株価指数との連動性を持ったストックオプションの構成と価格付けに関する研究を行った。これは上智大学の石井准教授との共同研究でエキゾティックなストックオプション(株価指数と個別株価の関係においてオプションを行使するかしないかを定めるオプション)の研究を行った。これは個別株価が低くても株価指数そのものが低ければ個別株価そのもののパフォーマンスは必ずしも悪いといえず、そのような株価指数と個別株の関係を行使やペイオフにとり入れたオプションに関する共同研究を行った。

また「離散確率解析」の応用として、離散HJB方程式の解法に関する研究を行った。とくにカタストロフィまた、離散確率解析の手法でカタストロフィオプションオプションは地震保険や関連商品のプライシングにも応用でき重要な話題だと思われる。これは、一橋大学の石村教授との共同研究を通じ公表することができた。この研究は、数理教育の観点から見ても金融数理技術を市井に浸透させるにも重要な簡明さを備えた理論であり、数理教育、ファイナンス教育の観点からみても重要と思われる。

前に研究した多次元のナンバーシステムを用いたヴァンデルコルプト列の構成とその数値積分への適用に関する論文のさらなる発展研究では、今回はp進整数において前の類似物であるヴァンデルコルプト列の構成を行いp進整数環上の積分評価への応用を行った。これは東京理科大の金子准教授との共同研究であった。

4. 研究成果

以上の研究のうち、平成 20-22 年度で、リーマンゼータ関数と確率論に関する論文は 4 編、離散確率解析も研究は 2 編公表した。また関連研究、関連論文を 3 編公表し、計 9 編の論文執筆公表を行った。また、離散確率解析とその応用に関する論文は 一橋大学石村教授との共同論文として *Advances in Mathematical Economics* に掲載が決定されている。

また、平成 20-22 年度で、リーマンゼータ関数と確率論に関する研究を 5 回（うち 3 回は国際学会、2 回は招待講演、離散確率解析の金融数理、保険数理への応用についての研究発表は国際学会で 2 回（うち 1 回は招待講演）、また関連研究、関連論文に関する研究発表を 4 回（うち 国際学会、国際研究会（例えばモスクワ大学確率論セミナーなど）は 3 回）を行った。

また、石井氏とのエキゾティックストックオプションに関する論文は *APFM*(2010) に掲載された。

また、金子氏との p 進整数環での一様列の研究は *Montecarlo methods and Applications*(2008) に掲載された。

5. 主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計 10 件）

- ① Fujita Takahiko, Ishimura Naoyuki, Discrete stochastic calculus and its application to discrete HJB equation, *Advances in Mathematical Economics*, (2011) 掲載確定. (査読有)
- ② Fujita Takahiko, Special values of the Riemann zeta function via arcsine variables, *Infinitely divisible processes and Related topics 15*, The Institute of Statistical Mathematics Cooperative Research Report 262, (2011) 70-79. (査読無)
- ③ Fujita Takahiko, Yano Yuko, Special values of the Hurwitz zeta function via generalized Cauchy variables, *Infinitely divisible processes and Related topics 15*, The Institute of Statistical Mathematics Cooperative Research Report 262, (2011) 62-69. (査読無)

④ Fujita Takahiko, A discrete analogue of two "dual" continuous GGC (Generalized Gamma Convolution variables), *Infinitely divisible processes and Related topics 14*, The Institute of Statistical Mathematics Cooperative Research Report 247, (2010) 87-91. (査読無)

⑤ Fujita Takahiko, Ishii Masahiro, Valuation of a Repriceable Executive Stock Option, *Asia-Pacific Financial Markets*, Vol. 17, No.1, (2010) 1-18. (査読有)

⑥ 藤田岳彦、石村直之、離散伊藤公式とその応用（数値解析における理論・手法・応用）、*京都大学数理解析研究所講究録*, 1638, (2009) 130-136. (査読無)

⑦ Fujita Takahiko, Kaneko Hiroshi, Matsumoto Shin, A uniformly distributed sequence on the ring of p -adic integers, *Monte Carlo Methods and Applications*, Vol.14 No.4, (2008) 303-310. (査読有)

⑧ Fujita Takahiko, Ishimura Naoyuki, Tanaka Daichi, An arbitrage approach to the pricing of catastrophe options involving the Cox process (with Ishimura, N. and Tanaka, D.), *Hitotsubashi J. of Economics* Vol 49, (2008) 67-74. (査読有)

⑨ Fujita Takahiko, A probabilistic approach to the special values of the Riemann zeta function, *京都大学数理解析研究所講究録*, 1590 (2008) 1-9. (査読無)

⑩ Fujita Takahiko, Euler's formulae for the Riemann zeta function and Cauchy variables, *Infinitely divisible processes and Related topics 12*, The Institute of Statistical Mathematics Cooperative Research Report 213, (2008) 98-103. (査読無)

〔学会発表〕（計 11 件）

① Fujita Takahiko, Analysis Seminar, Special values of the Riemann zeta function via arcsine random variables, 2011.1.29, Hitotsubashi Univ, Tokyo.

② Fujita Takahiko, School on Randomness and Information, Special values of the Riemann zeta function via probability theory, 2010.12.14, Pucon, Chile.

③ Fujita Takahiko, Infinitely divisible distributions and its applications, Special

values of the Riemann zeta function via arcsine random variables, 2010.11.5, The Institute of Statistical Mathematics, Tokyo.

- ④ Fujita Takahiko, Number Theory and Probability, Special values of the Riemann zeta function via arcsine random variables, 2010.9.13, Kyoto Univ, Kyoto.
- ⑤ Fujita Takahiko, Moscow University Probability Seminar , On Some functional of Brownian Motion and Random Walk, 2010.3.22, Moscow University, Moscow.
- ⑥ Fujita Takahiko, Japan Russia Probability and Mathematical Statistics Symposium, On Restrat Options, 2009.9.15, Steklov Institute, Moscow.
- ⑦ Fujita Takahiko, International Financial Engineering Education Symposium, On Restrat Options, 2009.8.8, Hitotsubashi University, Tokyo.
- ⑧ Fujita Takahiko, Stochastic Analysis and Financial Engineering International Symposium, Pricing Restrat Options, 2009.8.5, Kyoto Research Park, Kyoto.
- ⑨ Kawai Norihisa, Fujita Takahiko, Ishimura Naoyuki, Africom 2009, An arbitrage approach to pricing options with insurance applications, 2009.1.7, Suncity, South Africa.
- ⑩ Fujita Takahiko, School on Randomness and Information, A probabilistic approach to the special values of the Riemann zeta function, 2008.12.16, Univ.of Santiago, Chile
- ⑪ Fujita Takahiko, 大阪大学金融保険中ノ島ワークショップ, On some stochastic volatility model, 2008.12.7, 大阪

6. 研究組織

(1) 研究代表者

藤田 岳彦 (FUJITA TAKAHIKO)
一橋大学・大学院商学研究科・教授
研究者番号 : 50144316

(2) 研究分担者

なし

(3) 連携研究者

なし