

## 自己評価報告書

平成23年 5月 11日現在

機関番号：13901

研究種目：基盤研究 (C)

研究期間：2008～2011

課題番号：20540114

研究課題名 (和文) 中規模無限基数上の組合せ論

研究課題名 (英文) Combinatorics on medium-size infinite cardinals

研究代表者：

吉信 康夫 (YOSHINOBU YASUO)

名古屋大学・大学院情報科学研究科・准教授

研究者番号：90281063

研究分野：公理的集合論

科研費の分科・細目：数学・数学一般(含確率論・統計数学)

キーワード：数学基礎論，公理的集合論，集合論的位相空間論，強制法，強制公理，反映原理，基数不変量，

## 1. 研究計画の概要

アレフ 2 以上の比較的小さい無限基数(中規模無限基数)上での組合せ論に固有な構造を包括的に明らかにする。より具体的には、以下に掲げる題材を中心に調べる他、これらの問題に横断的に関わるアレフ  $\omega$  上の組合せ論についても調べる。

(1)  $\kappa$  閉やそれに似た性質をもつ半順序集合による強制法の違い，特にマーティンの極大公理を保存する程度の違いについて。

(2)  $\aleph_2$  以上の無限基数の可算部分集合族上の弱い反映原理が強いそれを導くかなど，可算集合族上の反映原理について。

(3) 可分距離付け可能空間についての基数不変量  $sa$  が一般にどのような値をとりうるかなど，位相空間のコンパクト化などに関連する基数不変量について。

## 2. 研究の進捗状況

(1) 代表者は, Asperó, Krueger とともに,  $\lambda$  が正則基数または可算共終基数のとき,  $\lambda$  の可算部分集合の定常族についての反映原理の強い否定である「不反映定常集合の稠密性」という命題が, 固有強制法公理(PFA)と無矛盾であることを示した。

(2) 半順序集合が  $(\omega_1+1)$ -作戦的閉であるとは, その上での長さ  $(\omega_1+1)$  のバナッハ・マズア型ゲームで, 後手が各手番でそこまでの棋譜の下限ゴール値と今何手目かという情報のみに依存する必勝法をもつときという。

代表者は, 上記(1)の議論の一部を一般化して,  $(\omega_1+1)$ -作戦的閉な半順序による強制法が PFA を保存することを示した。応用として, CP という組合せ命題を新たに導入し, これと PFA との無矛盾性を示した。この他, さらに弱い性質をもつ半順序による強制法でも PFA が保たれることや, 作戦的閉とより強い戦術的閉の概念の違いについても明らかにした。

(3) 代表者は, 嘉田(連携研究者)とともに, 非孤立点の全体がコンパクトでない可分距離化可能空間  $X$  について,  $X$  の互いに素な閉集合対全体と  $X$  上の距離全体との間に「距離が 1 以上」という関係を考え, これと Galois-Tukey 同型な順序構造を発見し,  $X$  のストーン・チェックコンパクト化を生成するスミルノフコンパクト化の族の最小濃度  $sa(X)$  を与える等式の構造的な説明を与えた。

(4) 代表者らは, リンデレーフ性など位相空間の被覆に関する性質の強制法に対する保存と基数不変量との関連について調べ, その結果足立は仮定  $b=\omega_1$  のもとで支配実数の付加によりリンデレーフ性が壊れる空間の例を発見し, 代表者はこれを改良してパラコンパクト性など他の被覆性質についても同様の例を発見する一方, マーティンの公理の下では, 比較的小さい空間のリンデレーフ性が可算鎖条件をみたす強制法で保たれることを示した。

### 3. 現在までの達成度

②おおむね順調に進展している。

(理由)

研究計画の項目(1)については、早い段階で PFA を保つ、ゲームを用いて定義される自然な半順序集合のクラスを発見でき、その後もその結果を拡張したり、関連の深い組合せ命題 CP を発見するなど、当初の予想以上の進展が得られており、今後更なる発展も見込んでいる。

項目(2)については、反映原理の強い形の否定と PFA との無矛盾性が明らかになるなど順調に進展している一方、強弱反映原理の差異などいくつかの問題は今後の課題として残されている。

項目(3)については、コンパクト化にまつわる基数不変量  $sa$  の値を決定する順序構造を発見するなど順調に進展しているほか、2010 年度には位相空間の被覆についての性質の強制法での保存と基数不変量の関連など当初予想していなかった方向への進展も始まり、急速に進展の度合いが大きくなってきている。

以上総合すると、項目ごとに進展の程度に差はあるものの、研究全体としてはおおむね順調に進展しているものと判断できる。

### 4. 今後の研究の推進方策

研究計画の項目(1)については、PFA を保つ、ゲームを用いて定義されるより包括的な半順序集合のクラスの探索を目指す。

項目(2)については、強弱反映原理の差異など以前から残された課題に取り組む他、連携研究者の淵野らが導入したフォドア型と呼ばれる新しい反映原理と強制公理の関連についても調べたい。

項目(3)については、位相空間の被覆についての性質の強制法での保存と基数不変量との関連(基数不変量  $b$  が大きい場合や支配実数以外の実数の付加の影響など)について引き続き調べるほか、強制公理の影響について調べたい。

### 5. 代表的な研究成果

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 1 件)

- ① David Asperó, John Krueger, Yasuo Yoshinobu, Dense non-reflection for stationary collection of countable sets, *Annals of Pure and Applied Logic*, 161(1), 94-108, 2009, 査読有.

[学会発表] (計 4 件)

- ① 足立裕基, 薄葉季路, 吉信康夫, Set theoretic aspects of Lindelöf spaces,

2010 年度 General Topology シンポジウム, 2010 年 12 月 21 日, 筑波大学.

- ② 嘉田勝, 友安一夫, 吉信康夫, How many miles to  $\beta X$ , after all?, 2010 年度 General Topology シンポジウム, 2010 年 12 月 20 日, 筑波大学.

- ③ 吉信康夫, 半順序集合上のゲームと PFA, 日本数学会秋季総合分科会, 2009 年 9 月 26 日, 大阪大学.

- ④ Yasuo Yoshinobu, Forcing axioms and closure properties of posets, The 10<sup>th</sup> Asian Logic Conference, 2008 年 9 月 3 日, 神戸大学.