

機関番号：13801

研究種目：基盤研究（C）

研究期間：2008～2010

課題番号：20540164

研究課題名（和文） 最大正則性原理とその応用

研究課題名（英文） Maximal regularity theory and its application

研究代表者

清水 扇文（SHIMIZU SENJO）

静岡大学・理学部・教授

研究者番号：50273165

研究成果の概要（和文）：解作用素の R -有界性を示し作用素値フーリエ・マルチプライヤーの定理を適用する手法により最大正則性を証明する方法を発展させた。その応用として、ナビエ・ストークス方程式で表わされる自由境界問題で表面張力を考慮に入れた場合の、任意の初期データに対する時間局所解の一意存在をスケール不変なソボレフ空間において証明した。また、UMD バナッハ空間ではない斉次ベソフ空間において、熱方程式の初期値問題に対する最大正則性を導いた。

研究成果の概要（英文）：We develop the method to prove maximal regularity by proving R -bounded of an solution operator in view of operator-valued Fourier-multiplier theorem. As an application of the maximal regularity, we prove local solvability of free boundary problems for the Navier-Stokes equations with surface tension in a scale invariant Sobolev space. Moreover we prove maximal regularity of the Cauchy problem for the heat equation in homogeneous Besov space that is not a UMD (unconditional martingale differences) Banach space.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合 計
2008年度	1,500,000	450,000	1,950,000
2009年度	1,400,000	420,000	1,820,000
2010年度	500,000	150,000	650,000
年度			
年度			
総 計	3,400,000	1,020,000	4,420,000

研究代表者の専門分野：偏微分方程式論

科研費の分科・細目：数学・基礎解析学

キーワード：最大正則性、自由境界問題、ナビエ・ストークス方程式、 R -有界性、フーリエ・マルチプライヤーの定理

1. 研究開始当初の背景

1980年代後半より発展方程式に対する最大正則性の研究がヨーロッパを中心に発展したが、具体的な方程式に対し最大正則性を証明する方法は H^∞ calculus という手法が主流であった。今世紀に入りワイスにより作用素の R -有界性を示すことにより作用素値フー

リエ・マルチプライヤーの定理を用いて最大正則性を証明する一般論が提示された。我々はストークス方程式に対し作用素値フーリエ・マルチプライヤーの定理を用いて最大正則性を証明した。

最大正則性の最大の有用性は、半群の理論のみでは不十分である準線形方程式系が解

ける点にある。ナビエ・ストークス方程式は、固定境界に直す変換を用いることにより、準線形方程式系となる。我々はストークス方程式の最大正則性の結果をナビエ・ストークス方程式の自由境界問題に応用した。

2. 研究の目的

本研究では、ここ 20 年来研究が進展している最大正則性原理に着目し以下の研究を行うことを目的とする。

- (1) 最大正則性を用いた非圧縮性粘性流体の自由境界問題のスケール不変なソボレフ空間での解の一意存在の証明
- (2) UMD ではないバナッハ空間に対する最大正則性原理の証明とその 2 次元臨界非局所型方物型偏微分方程式に対する応用
- (3) リヤプノフ汎関数法による流体の自由境界問題の解の非安定性の証明

3. 研究の方法

(1) フーリエ解析、関数解析（半群、レゾルベント論）の手法に基づき柴田良弘（早稲田大学）との討議により行う。

(2) 実解析の手法に基づき小川卓克（東北大学、連携研究者）との討議により行う。

(3) はエネルギー法に基づきパデューラ、マッサーリ（フェラーラ大学、イタリア）との討議により行う。

4. 研究成果

(1) 最大正則性を用いた非圧縮性粘性流体の自由境界問題の解析

- ① 線形化方程式である Stokes 方程式に対する最大正則性の証明

1 相問題（発表論文②⑨）及び 2 相問題（発表論文④）の半空間のモデル問題の精密な解析を行い L_p 最大正則性を証明した。自由境界問題の線形化として扱う境界条件は粘着条件（ディリクレ条件）ではなく、1 階微分を含む自由条件（ノイマン条件）である。ラプラス・フーリエ変換及びその逆変換を用いて積分作用素により解を表示する。ストークス方程式の半空間モデル問題に現れるすべての積分作用素の型を分類し、積分作用素の R -有界性を示し、作用素値 フーリエ・マルチプライヤー の定理を適用してすることによりモデル問題の解の L_p 最大正則性を示した。2 相問題では法線方向の不連続性が本質的であり、扱いが困難であったが解表示のさらな

る精密な表示により最大正則性を証明した。モデル問題の解析は表面張力を考慮に入れて完結している。有界領域に対しては、表面張力を考慮に入れない場合の結果を得ている（発表論文⑫）。

- ② ナビエ・ストークス方程式の自由境界問題の L_p 空間枠での解の一意存在の証明

自由境界値問題をラグランジュ座標系で定式化して固定境界に直すと、ナビエ・ストークス方程式は準線形となる。スケール不変な L_p 関数空間でこの非線形問題解くために、線形化方程式に対する最大正則性の定理を利用する。準線形方程式の初期一境界値問題における任意の初期値に対する時間局所解の一意存在を、線形化問題の最大正則性定理を用いて縮小写像の原理により証明した。外側に有界な境界がある 2 相問題で表面張力を考慮に入れない場合（発表論文⑩）、全空間における 2 相問題で自由境界がグラフで与えられ、表面張力を考慮に入れた場合（発表論文⑤）、1 相自由境界問題で表面張力を考慮に入れた、領域の形状が一般の場合の結果のアナウンス（発表論文⑥）を発表した。最大正則性とその流体の自由境界問題への応用を和文で解説したのが発表論文⑧、この解説のアメリカ数学会雑誌への英訳が発表論文③である。

- (2) UMD ではないバナッハ空間に対する最大正則性原理の証明とその応用

- ① 2 次元ハーディ 1 空間におけるドリフト・ディフュージョン系の可解性

最大正則性を示すための一般論は、UMD ないバナッハ空間に対して成立しており UMD ではないバナッハ空間に対しては各論的に証明しなければならない。ハーディ 1 空間 は非回帰的であり UMD 空間ではない。ハーディ 1 空間における初期値に対する最大正則性評価を、ハーディ 1 空間における L_p - L_q 評価を用いて確立した。2 次元ドリフト・ディフュージョン系は L_1 空間がスケール不変となる臨界空間となるが、 L_1 空間ではエントロピー汎関数が意味をもたないため、 L_1 空間と同じスケール構造を持ちエントロピー汎関数が意味を持つハーディ 1 空間 において、任意のデータに対する時間局所可解性と小さいデータに対する時間大域的可解性を証明した（発表論文⑪）。

- ② 回帰的ベソフ空間における最大正則性と 2 次元臨界ケラー・ジーゲル系に対する

応用

UMD バナッハ空間ではない積分指数が1である斉次ベソフ空間において、熱方程式の初期値問題に対する最大正則性を導いた。初期値問題に対する L_p - L_q 評価式の斉次ベソフ空間版の結果を用いて K -関数を構成し、双対理論を組み合わせることで最大正則性を証明した。その応用として2次元ケラー・ジーゲル方程式の初期値問題を考えるが、この斉次ベソフ空間は L_1 空間と同じスケール構造を持ちスケール不変な臨界空間であり、エントロピー汎関数が意味を持つ空間である。任意の初期データに対する時間局所解の一意存在を証明した（発表論文⑦）。

(3) リヤプノフ汎関数法による流体の自由境界問題の解の非安定性の証明

天井についた水滴が落ちる現象を、表面張力を考慮に入れて非圧縮性粘性流体の自由境界の非安定性として捉えた。非線形問題に対するエネルギー恒等式から汎関数を構成しこの汎関数が指数増大することを示して解の非安定性を証明するが、エネルギー恒等式で不足する初期表面からの高さ関数を人為的に構成して加えることにより汎関数の指数増大性を示した。この結果、摂動初期エネルギーが負のとき解は非安定であることが証明された（発表論文①）。

5. 主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計12件）

- ① U. Massari, M. Padula, S. Shimizu, Loss of control of motions from initial data for pending capillary liquid, Quart. Appl. Math., 査読有, 2011, 印刷中.
- ② Y. Shibata, S. Shimizu, On the maximal L_p - L_q regularity of the Stokes problems with first order boundary condition; model problems, J. Math. Soc. Japan, 査読有, 2011, 掲載決定.
- ③ S. Shimizu, Maximal regularity and its application to free boundary problems for the Navier-Stokes equations, Sugaku Expositions, 査読有, American Mathematical Society, 2011, 掲載決定.
- ④ Y. Shibata, S. Shimizu, Maximal L_p - L_q

regularity for the two-phase Stokes equations; Model problems, J. Differential Equations, 査読有, Vol.251, 2011, pp.373-419.

- ⑤ S. Shimizu, Local solvability of free boundary problems for the two-phase Navier-Stokes equations with surface tension in the whole space, Progress in Nonlinear Differential Equations and Their Applications, 査読有, Vol.60, 2011, pp.647-686.
- ⑥ Y. Shibata, S. Shimizu, Report on a local in time solvability of free surface problems for the Navier-Stokes equations with surface tension, Applicable Analysis, 査読有, Vol.90, 2011, pp.202-214.
- ⑦ T. Ogawa, S. Shimizu, End-point maximal regularity and its application to two-dimensional Keller-Segel system, Math. Z., 査読有, Vol.264, 2010, pp.601-628.
- ⑧ 清水扇丈, 最大正則性原理とその流体の自由境界問題への応用, 日本数学会編集「数学」論説, 査読有, 61巻4号, 2009, pp.352-375.
- ⑨ Y. Shibata, S. Shimizu, On a resolvent estimate of the Stokes system in a half-space arising from a free boundary problem for the Navier-Stokes equations, Math. Nachr., 査読有, Vol.282, 2008, pp.482-499.
- ⑩ S. Shimizu, Maximal regularity and viscous incompressible flows with free interface, Banach Center Publ., 査読有, Vol.81, 2008, pp.471-480.
- ⑪ T. Ogawa, S. Shimizu, The drift-diffusion system in two-dimensional critical Hardy space, J. Funct. Anal., 査読有, Vol.255, 2008, pp.1107-1138.
- ⑫ Y. Shibata, S. Shimizu, On the L_p - L_q maximal regularity of the Neumann problem for the Stokes equations in a bounded domain equations, J. reine angew. Math (Crelles Journal), 査読有, Vol.615, 2008, pp.157-209.

〔学会発表〕（計15件）

- ① 清水扇丈, Local well-posedness of incompressible two-phase flow with

- phase transition, 若手による流体力学の基礎方程式の研究集会特別講演, 2011年1月6日, 名古屋大学(愛知県).
- ② J. Pruess, Y. Shibata, S. Shimizu, G. Simonett, Local well-posedness of incompressible two-phase flow with phase transition, International Conference on Evolution Equations, October 14, 2010, Schmitten, Germany.
- ③ U. Massari, M. Padula, S. Shimizu, Loss of control of motions from initial data for pending capillary liquid, Regularity aspects of PDE, September 8, 2010, Bedlewo, Poland.
- ④ J. Pruess, 清水扇丈, G. Simonett, 有界領域における相転移を伴う非圧縮性2相流体の時間局所適切性—密度が等しい場合—, 日本数学会秋季総合分科会, 2010年9月25日, 名古屋大学(愛知県).
- ⑤ 清水扇丈, Local well-posedness of incompressible two-phase flow with phase transition, 数理解析研究所研究集会「流体と気体の数学解析」, 2010年7月8日, 京都大学数理解析研究所(京都市).
- ⑥ 清水扇丈, 相転移を伴う非圧縮性2相流の線形化問題について, 日本数学会2010年度年会函数方程式論分科会, 2010年3月27日, 慶應義塾大学(神奈川県).
- ⑦ S. Shimizu, On the local in time solvability of the Navier-Stokes equations with phase transition, Workshop on Mathematical Fluid Dynamics, 11 March, 2010, Waseda University, Japan.
- ⑧ S. Shimizu, Resolvent estimates and maximal regularity of the interface problem for the Stokes system in the whole space, Career Opportunity for Women in Mathematical Fluid Dynamics, IRTG1529 Mathematical Fluid Dynamics, 20 October, 2009, TU Darmstadt, Darmstadt, Germany.
- ⑨ S. Shimizu, On the Navier-Stokes equations with phase transition, International Conference Nonlinear Parabolic Problems in honor of Herbert Amann, 11 May, 2009, Banach Center, Bedlewo, Poland.
- ⑩ 柴田良弘, 清水扇丈, Lp-Lq maximal regularity of the interface problem for the Stokes system with surface tension, 日本数学会2009年度秋季総合分科会, 函数方程式論分科会, 2009年9月27日, 大阪大学(大阪府).
- ⑪ 柴田良弘, 清水扇丈, Generation of analytic semigroup associated with Stokes system with some first order boundary condition, 日本数学会2009年度年会函数方程式論分科会, 2009年3月29日, 東京大学(東京都).
- ⑫ 柴田良弘, 清水扇丈, Maximal regularity theorem for the Stokes system with some first order boundary condition, 日本数学会2009年度年会函数方程式論分科会, 2009年3月29日, 東京大学(東京都).
- ⑬ 柴田良弘, 清水扇丈, 表面張力を考慮に入れた有界な流体の自由境界問題の時間局所可解性について, 日本数学会2008年度秋季総合分科会函数方程式論分科会, 2008年9月27日, 東京工業大学(神奈川県).
- ⑭ S. Shimizu, Local solvability of free surface problems for the Navier-Stokes equations with surface tension, Workshop on Mathematical Fluid Dynamics, 10 Sep. 2008, TU Darmstadt, Darmstadt, Germany.
- ⑮ S. Shimizu, Local solvability of free surface problems for the Navier-Stokes equations with surface tension, Parabolic and Navier-Stokes Equations 2008, 2 Sep. 2008, Banach Center, Bedlewo, Poland.
- 〔図書〕(計1件)
- ① 菊地光嗣, 中島徹, 明山浩, 小野仁, 清水扇丈, 学術図書, 工学系の線形代数学, 2010, 291 ページ.

6. 研究組織

(1) 研究代表者

清水 扇丈(SHIMIZU SENJO)

静岡大学・理学部・教授

研究者番号: 50273165

(2) 研究分担者

菊地 光嗣(KIKUCHI KOJI)

静岡大学・工学部・教授

研究者番号: 50195202

(3) 連携研究者

小川 卓克(OGAWA TAKAYOSHI)

東北大学・理学研究科・教授

研究者番号: 20224107