

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成24年5月15日現在

機関番号：17102

研究種目：基盤研究（C）

研究期間：2008～2011

課題番号：20540178

研究課題名（和文） 量子変形作用素に関するスペクトル理論の構築とその量子物理への応用

研究課題名（英文） The construction of the spectral theory on quantum deformed operators and its application to quantum physics

研究代表者

太田 昇一（OTA SHOICHI）

九州大学・大学院芸術工学研究院・教授

研究者番号：70107176

研究成果の概要（和文）：

量子環のヒルベルト空間上への表現の解析をするために q -正規作用素に代表される q -変形作用素に関するスペクトル理論を構築することは必要不可欠である。 q -正規作用素に対して、ヒルベルト空間上の標準的作用素の「スペクトル測度」および「スペクトル分解」に対応する新しい概念の創出を図る。その結果、1より小さい正数 q の場合、作用する空間を広げることにより q -正規作用素がスペクトル表現される標準的作用素に拡大されることが示された。

研究成果の概要（英文）：

A kind of spectral theory of q -deformed operators in a Hilbert space is needed so that unbounded representations of quantum algebras are analyzed. This work is devoted to investigating a q -normal operator in a Hilbert space, compared with a standard spectral measure and the spectral decomposition for a normal operator in a Hilbert space. It is shown that, if a positive number q is smaller than 1, every q -normal operator in a Hilbert space is extended to a standard normal operator in a possibly larger Hilbert space.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合計
2008年度	900,000	270,000	1,170,000
2009年度	800,000	240,000	1,040,000
2010年度	700,000	210,000	910,000
2011年度	500,000	150,000	650,000
総計	2,900,000	870,000	3,770,000

研究分野：関数解析

科研費の分科・細目：数学・基礎解析学

キーワード：unbounded operator, deformed operator, q -normal operator, Hilbert space, subnormal operator

1. 研究開始当初の背景

代数的関係式 $xx^* = qx^*x$ (q は 1 でない正数) は量子群・量子環理論における礎石である。この等式を満たす要素は 1 次元量子複素平面の生成要素や q -ハイゼンベルグ代数の

ような量子環の生成要素および定義関係式のひとつとして現れる。 C^* -環的（有界作用素の範疇での）考察による量子群の研究や、上記に述べた個々の量子群に対応した代数の表現に関する研究は、多くの数理論理学者に

よって、近年非常に活発に研究がなされている。

一方、作用素論的見地からの非有界表現に関する研究は、量子群の理論から極めて重要であると考えられる。何故なら、このような代数を解析するためにヒルベルト空間上への表現を考えると、必ず非有界表現を扱うことになる。実際、ヒルベルト空間上の自明でない作用素がこの代数的関係式を満たすと、必ず非有界になる。この関係式を満たす正の変数 q で規定される作用素を q -正規作用素と言ひ、標準の正規作用素 (q が 1 の場合) の一般化として研究の必要性が指摘されていた。この事に対応して上記の q -正規作用素からなるクラスを含む量子変形 (q -変形) 作用素族に関する基礎理論の構築が作用素論の観点から系統的に進められていた。

q が 1 の場合である標準の作用素は先達の研究によって多くの論文が著され、それらの成果についても多くの著書が刊行されている。 q -変形作用素族に関して、正規、ハイポ正規、サブ正規からなる標準の作用素族に対応する作用素族が系統的に研究され、特に各標準の作用素に対応する q -変形作用素は付随する縮小作用素によって特徴付けが与えられていた。また、標準の正定値性に対応して q -正定値性の概念が導入され、定義域を不変にする作用素が q -正定値をもてば q -フォーマル正規拡大を持つ事が示されていた。このような状況で q -変形作用素の範疇でスペクトル理論の構築、特に、 q -正規作用素に対して標準の正規作用素のスペクトル分解に対応する理論の構築がこの作用素族の解析に必要となっていた。

2. 研究の目的

近年もっとも急速に発展してきた数学及び数理物理学の分野の 1 つである量子群の理論に関して、量子 $*$ -環のヒルベルト空間上への表現を関数解析的手法で研究する際には、ヒルベルト空間上の所謂 q -正規作用素に代表される q -変形作用素に関する標準 (q が 1 の場合である) の作用素論のような系統的な研究、特にスペクトル理論を構築することが必要不可欠であると考えられる。例えば、 q -正規作用素のスペクトルは 2 次元ルベーグ測度で無限大になるほど大きい。また、極端に相違する例として、そのスペクトルが空集合になる q -変形ハイポ正規作用素が存在する

(変数 q が 1 に等しいの場合、有界、非有界に係わらず必ずそのスペクトルは空集合ではない。) ことが分かっている。このように q -変形作用素は様々な様相を現す。それ故、これまでの q -変形作用素族の系統的な研究を継続させ、多様な見地から q -正規作用素を含む q -変形作用素族の解析を継続して行ひ。特に、各 q -正規、 q -クエーサイ正規、 q -ハイポ正規なる重み付きシフト作用素および q -調和振動子に現れる q -生成作用素に関する先行研究を基に、変形パラメータ q がどのような条件のもとで、 q -正規作用素が標準のスペクトル解析可能な作用素である標準の正規作用素へ拡大されるのかについて考察する。これらの研究を踏まえて、ヒルベルト空間上の標準の作用素に対する「スペクトル測定」および「スペクトル分解定理」に対応する概念を創出・研究し、その応用として量子群・量子環の理論における (非有界) 作用素表現の解析の発展に寄与することを目的とする。

3. 研究の方法

新しい作用素論の展開を含む可能性があることから、これまで発展してきた作用素論における重要で基本的な理論や多くの分野に影響を与えてきた結果等を参考にしながら多様な観点から、変形作用素族に関する系統的な研究をすることとした。特に、正の変数 q が 1 の場合は従来の作用素論の枠組みに入り、変数が 1 を境にして変形作用素は全く異なる様相を示す。

先ず始めに、変形作用素族の継続的な系統的研究を行うために、国内外の著名な研究者と議論を重ね、作用するヒルベルト空間を広げたバナハ空間上で特異な性質を観察するため、自己のスカラー倍にユニタリ同値なる q -正規作用素の特異な性質を一般化した作用素の擬可換性についてバナハ空間上の作用素で考察を行う。次に、量子論に関連して、W. Mlak により導入され研究された非有界作用素の circularity に注目して、量子群との関連から q -変形 circularity なる概念を導入し、Mlak の結果の一般化を図ることとした。

次に、主たる本研究課題の対象である変形作用素族に関するスペクトル解析に関する研究では、量子群の理論に関連して作用素に対して「 q -正定値性」の概念を導入して、 q -調和振動子に現れる q -生成作用素の q -正規拡

大および標準の正規拡大について得られた先行研究を基に、標準の正規作用素への拡大問題について多くの成果を得ている F.H. Szafraniec 教授と相互訪問する。ことにより不断の議論を行い、非有界重み付きシフト作用素において得られている肯定的な結果について精査することにより、変数 q が 1 より小さい場合における肯定的予想「 q -正規作用素は標準の正規拡大もつ」ことについて議論し、進展を図る。

4. 研究成果

(1) ヒルベルト空間上の q -正規作用素のもつ特異な性質として、自己のスカラー倍にユニタリ同値になる(即ち、 q -正規作用素を T とすると適当なユニタリ作用素 U が存在して、 $TU=qUT$) ものがある。この性質に関連して、J. A. Brooke, P. Busch, B. Pearson は量子環の生成元に関することから、共通因子 k を介した関係式 $AB=kBA$ を満たすヒルベルト空間上の有界作用素の組 $\{A, B\}$ について論じている。 q -正規作用素のもつ前述の特異な性質について、彼等の結果をバナハ空間上の有界作用素に一般化するための議論を重ね、バナハ空間上のこのような擬可換性について、バナハ空間上の正規作用素間(片方がパラ正規作用素の場合も含めて)の擬可換性が標準の可換性になる特徴付けを多様な観点から与えた。特に、「一様凸バナハ空間において正規作用素間の自明でない擬可換性が成立すれば、その共通因子の絶対値は 1 となる」ことを示した。ヒルベルト空間上の非有界作用素に関する擬可換性の議論は q -正規作用素の研究にも重要であり、今後の研究の進展が望まれる。

(2) 非有界作用素における circularity に関する W. Mlak による一連の研究の q -変形作用素における一般化を行った。 q -正規作用素を含むより広い範疇の q -circular 作用素($q=1$ の場合は標準の circular 作用素になる。)について考察し、「稠密な定義域を持つ閉作用素が q -circular になる条件は、その作用素が性質 Q (自己のスカラー倍にユニタリ同値になる) を持ち、かつ circular となることである。」ことを示した。この事は、 q -circularity に関しては作用素の circularity の性質を調べることに帰着することを示唆している。その circularity を規定する強連続 1 径数ユニタリ群が存在する

場合を強 circularity とよぶ。既約な circular 有界作用素が強 circular になることは 25 年ほど前に、W. Arveson 等により示されている。非有界作用素の場合、その極分解における部分等距離作用素が既約ならば circularity から強 circularity が従うことを示した。

(3) q -変形作用素の枠組みについて、標準作用素の体系を考慮して q -ハイポ正規作用素を含む q -パラ正規作用素という新たな概念(q が 1 の場合は標準のパラ正規作用素)を導入した。 q が 1 より大きい場合は有界、非有界いずれの作用素も存在するが、正の変数 q が 1 より小さい場合、自明でない q -パラ正規閉作用素は必ず非有界となり、そのスペクトルは 0 を含むことを示した。この事により、 q -変形作用素族において q -ハイポ正規作用素族を含み、標準の作用素族(q が 1 の場合)に対応する体系が与えられた事になる。

(4) 本研究の主たる目的である「 q -正規作用素に対して、標準の正規作用素におけるスペクトル分解定理に対応する擬スペクトル測度の存在を確立し、同様な形態で記述できるか」について以下のような結果を得ることが出来た：

① 正の変数 q が 1 より小さい場合、ヒルベルト空間 H 上の q -正規作用素は、 H を含む適当なヒルベルト空間上の標準の正規作用素に拡大される。この事より、 q -ケーサイ正規作用素も標準の正規拡大をもつことが判明した。

② 正の変数 q が 1 より大きい場合、上記に反して q -正規作用素は決して標準の正規拡大をもたない。一方、上記①よりその共役作用素は適当なヒルベルト空間上への標準の正規拡大をもつ。

①により正数 q が 1 より小さい場合、適当なスペクトル測度により記述される正規作用素に拡大される。この事実はヒルベルト空間上の非有界な対称作用素が M. A. Naimark の意味の第 2 種の自己共役拡大をもつことと同様に、 q -正規作用素が擬スペクトル測度による表現および変形作用素に対するある種のスペクトル解析の可能性を示唆しており、 q -正規な要素を含む代数の非有界表現の解析に有用な解析手段になると推察される。

一方、作用素論の観点からは上記②の正の変数 q が 1 より大きい場合は極めて複雑な作用素の形態が推測される。実際、これまでの

基礎研究で q -ハイポ正規作用素は正の変数 q が 1 より小さい場合は必ず非有界となり、スペクトルも必ず 0 を含む。一方、正の変数 q が 1 より大きい場合は有界、非有界共に起こり、スペクトルも空集合から複素数全体と多様な形態が知られている。

(5) 有界作用素の関係で調べた m -isometry に関して、連携研究者である長宗雄教授(神奈川大学)と棚橋浩太郎(東北薬科大学)と討議を重ね、 m -isometry が有界な逆作用素をもつパラ正規作用素ならば、ユニタリ作用素になることや、S.M. Patel による 2-isometry の場合の結果の一般化として m -isometry の冪作用素は再び m -isometry になるという重要な作用素の性質を導きだした。

次に、 m が偶数の場合、J. Agler と M. Stankus によって有界な逆作用素を持つ $(m+1)$ -isometry は必ず m -isometry になることが知られていた。この結果に対して、全ての奇数 m について、有界な逆作用素を持つ $(m+1)$ -isometry で m -isometry ではない例が存在することを有界な重み付きシフト作用素で与えた。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 7 件)

① M. Cho, S. Ota, K. Tanahashi, Invertible weighted shift operators which are m -isometries, 2012 年, 査読有, to appear in Proceedings of American Mathematical society

② M. Cho, S. Ota, K. Tanahashi, On m -isometric operators, Glasnik Matematički, 2012 年, 査読有, 印刷中

③ M. Cho, R. Harte, S. Ota, Commutativity to within scalars on Banach space, Functional Analysis, Approximation and Computation, vol. 3, pp. 69-77, 2011 年, 査読有

④ M. Cho, B.P. Duggal, R. Harte, S. Ota, Operator equation $AB=ABA$, International Mathematical Forum, vol.5 no. 53, pp.2629-2637, 2010 年, 査読有

⑤ S. Ota, q -deformed circularity for an unbounded operator in Hilbert space, Colloquium Mathematicum, vol.120, pp.191-199, 2010 年, 査読有

⑥ 太田 昇一, Circular 作用素について, 数理解析研究所講究録, 1678 巻, pp.128-133, 2010 年, 査読無

⑦ 太田 昇一, 非有界作用素と量子群に現

れる変形作用素について, 数学, 62 巻, pp. 40-56, 2010 年, 査読有

[学会発表] (計 5 件)

① 長 宗雄 (代表), m -isometric operators, 数理解析研究所研究集会, 2011年11月14日, 京都大学

② 太田 昇一, Topics related to deformed operators with parameters, Functions and Operators, 2010 年 6 月 25 日, Jagiellonian University, ポーランド

③ 太田 昇一, Circular 作用素について, 数理解析研究所研究集会, 2009 年 10 月 30 日, 京都大学

④ 太田 昇一, A quantum deformed operator, International conference on infinite particle, Systems and complex systems, 2008 年 9 月 22 日, Kazimierz, ポーランド

⑤ 太田 昇一, A quantum deformed operator and its applications, The Fifth International Conference of Applied Mathematics and Computing, 2008 年 8 月 16 日, Plovdiv, ブルガリア

6. 研究組織

(1) 研究代表者

太田 昇一 (OTA SHOICHI)

九州大学大学院芸術工学研究院・教授

研究者番号 : 70107176

(2) 連携研究者

井上 淳 (INOUE ATUSHI)

福岡大学理学部・教授

研究者番号 : 50078557

長 宗雄 (CHO MUNE0)

神奈川大学工学部・教授

研究者番号 : 10091620