様式Ｃ－１９

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成２４年５月３１日現在

機関番号：３２６１２
研究種目：基盤研究（C）
研究期間：2008～2011
課題番号：２０５４０１８８
研究課題名（和文）非可換調和解析における特異積分作用素論－実ハーディ空間の有効性の検証
研究課題名（英文） Theory of Singular Integral Operators in Non-commutative Harmonic Analysis – A verification of Use of Real Hardy Spaces.
研究代表者
河添　健（KAWAZOE TAKESHI）
慶應義塾大学・総合政策学部・教授
研究者番号：９０１５２９５９

研究成果の概要（和文）： 平成 20 年度から平成 23 年度への 4 年間において、主としてヤコビ解析における実ハーディ空間の構成とアトム分解およびその応用として特異積分作用素の L^p 有界性や補間理論を研究した。これらの非等質型空間における解析は通常の Euclid 空間での実解析や Dunkl 解析の自然な拡張である。また Chebli-Trimeche hyper 群上の解析の主たる例となる。さらに付随した研究成果として、これらの空間における不確定性原理の拡張なども得られた。これらの成果は今後、Cherednik 変換に対する調和解析に拡張することが期待され、本研究はその道筋を切り開くものとなった。

研究成果の概要（英文）： In the past 4 years from 2008 to 2011 real Hardy spaces for Jacobi analysis and their atomic decompositions have been investigated. Moreover, as applications of the Hardy spaces, L^p boundedness of some singular integral operators and the theory of interpolation spaces were established. These results for the spaces of non-homogeneous type are natural extension of ones in the Euclidean spaces and the Dunkl analysis,. Jacobi analysis is a special case of Chebli-Trimeche hypergroups. As ancillary research, several uncertainty principles are also obtained for the spaces of non-homogeneous type. These results obtained in this research pave the way to harmonic analysis for the Cherednik transform.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
2008 年度	700,000	210,000	910,000
2009 年度	800,000	240,000	1,040,000
2010 年度	1,000,000	300,000	1,300,000
2011 年度	800,000	240,000	1,040,000
年度			
総　計	3,300,000	990,000	4,290,000

研究分野：数物系科学
科研費の分科・細目：数学・基礎解析学
キーワード：非可換調和解析、実ハーディ空間、ヤコビ解析、最大関数、特異積分、L^p 有界性、アトム分解、補間法

1. 研究開始当初の背景

1930 年代から始まったリー群上の非可換調和解析は表現論の発達と共に円熟期を向かえた。フーリエ解析や L^p 空間上の各種作用素の有界性など多くの成果が得られている。とくに 80 年代

後半からの共通認識として、リー群がコンパクト群やハイゼンベルク群などの等質型 (doubling 条件が成立する空間)
であれば、ユークリッド空間における調和解析の類型－ハーディ空間の理論、そのアトム分解、BMO 理論、特異積分論への応用など－ が得られると考えられている。しかしながら
空間が等質型でないときは、ハーディ空間に関する研究はほとんどなされてこなかった。このような状況の中で、河添は実ランク1な半単純リー群における実ハーディ空間を動径最大関数を用いて定義する研究を続けてきた。本研究はこの研究を次の視点から精密化および拡張を試みるものである。

(1) 実ランク1の半単純リー群上の両側 K 不変関数に関する実ハーディ空間の特徴付け、

(2) アトムの定義とアトム分解の構成、

(3) いくつかの特異積分作用素の H^1 有界性

(4) ヤコビ解析などへの拡張

これらの成果によりより広い範囲の非可換調和解析が可能となり、対象とする特異積分作用素の有界性を考える上で有効となる。

2. 研究の目的

(1) 広範な非可換調和解析の実現：長年続けてきた実ランク1の半単純リー群上の両側 K 不変関数に関する調和解析の当然の拡張として、リーマン対称空間上の関数 (片側 K 不変関数) や高ランクなリー群上の関数に対する実ハーディ空間の構成を考える。また実ランク1の両側 K 不変関数に関する調和解析はヤコビ解析の特殊な場合である。半単純群上の理論をヤコビ解析に拡張することは自然な流れである。さらなる拡張として、最終的には hyper 群上の実ハーディ空間の構成も考えたい。とくに Cherednik 空間への拡張は有意義と考える。

(2) 構築する理論：上述の対象とする空間上で実ハーディ空間の定義を与える。定義自体は Euclid 空間の類型として容易である。例えば最大関数が L^1 となる関数の全体として定義できる。しかし最大関数を変えた場合の同値性やその特徴付け、アトム分解、BMO 理論、特異積分論への応用となると空間の非等質性から困難を極める。しかしその困難さに実ハーディ空間の有効性があるのであって、
本研究の面白さである。

3. 研究の方法

実ハーディ空間の有効性を示すために、次の過程で議論を進めて行きたい。最初に最大関数の有界性を用いて実ハーディ空間 H^p を定義する。そしてその空間に対して

(1) アトム分解

(2) BMO 理論

(3) 補間理論

(4) フーリエ・マルティプライヤーの L^p\$評価

(5) フーリエ積分作用素の L^p 評価

(6) 波動方程式の L^p \$評価

を考える。Euclid 空間では、(6)の証明に(1)、(3)、(4)、(5)を用い、(3)、(4)の理論は(1)、(2)をもとに構築される。この流れを上述の広範な非可換調和解析においても可能であるか確かめる。これが可能であれば実ハーディ空間の有効性が検証されたことになる。

また本研究の特色ある方法の一つは、対象とする空間を広範としたことである。そしてその中でより普遍的な類型の構築を目指す。
近年 (非可換) 調和解析は研究が大きく進行すると同時に、細分化も進み大きな理論の流れに欠乏している感がある。このような中で
実ハーディ空間の有効性を検証することは、表現論・実解析・確率過程などを含む大きな流れとなる可能性を秘めている。
さらに広範な空間を対象とすることから、ここ数年の研究体制としても研究協力者を各国に求めている。主として中国・フランス・ドイツ・モロッコ・チュニジアの研究者と情報交換や研究打合せ

を行い、それぞれの得意とする対象や手法を習得してきた。本研究ではこれらをさらに融合することによって研究を推進かつ加速する予定である。主な研究協力者と分野は以下の通りである。
① 中井英一(茨城大理)、宮地昌彦(東京女子大)実解析学全般、
② J-Ph. Anker (Orleans 大), K. Koufany (NancyI 大) 半単純リーおよび等質空間上の調和解析、
③L. Peng, Lie Heping, Lie Jianming (北京大) 実解析、Jacobi 変換および Heisenberg 群上の調和解析、
④ R. Daher, A. Abouelaz (HassanII 大)
Jacobi、Dunkl-Jacobi 変換および hyper 群上の調和解析、
⑥ M. Sifi(Tunis 大) hyper 群上の調和解析;
⑦ M. Voit, M. Rosler(Durtmund 大) 確率過程および hyper 群上の調和解析。

4．研究成果

(1) 実ハーディ空間の特徴付けとアトム分解：実ランク 1 な半単純リー群上の K 両側不変関数を対象とする研究から始め、目標通りにヤコビ解析まで拡張することができた。実ハーディ空間は動径最大関数を用いて定義した。この空間のアトム分解を最終目標としたが、Euclid 空間の時と同様の被覆定理が成立しないので、Euclid 空間の時の論法は使えない。そこで最初に Abel 変換を用いて実ハーディ空間を特徴付けることから始めた。結果として、ヤコビ解析における実ハーディ空間はAbel変換をするとEuclid空間上の実ハーディ空間(正確には Tribel-Lizorkin 空間)に対応することが分かった。そこでこの対応する空間のアトム分解を Abel 変換の逆変換で引き戻すことにより、ヤコビ解析における実ハーディ空間の分解を得ることができた。最終的にはその引き戻しをさらに精査して 4 種のアトムによって実ハーディ空間を分解できた。以上の結果は事項の主な発表論文の①、③、⑦にまとめられている。

(2) 特異積分作用素の有界性：多くの特異積分作用素は $p>1$ に対して強 L^p 有界になるが、$p=1$ のときは有界性が崩れる。このとき Euclid 空間の場合、H^1 上で有界となる。この類型が(1)で得た実ハーディ空間に対しても成立するかを調べた。特異積分作用素としては Littewood-Paley の g-関数および Luzin の面積関数を扱った。Littewood-Paley の g-関数に関しては Euclid 空間の時の類型が成立する。Luzin の面積関数に関しては、積分作用素の積分領域を若干制限する必要が生じ、完全な類型には至っていない。しかし、
(H^1, L^1) 強有界性という全く新しい形の有界性をヤコビ解析に導入できた意義は大きい。これらの成果は⑦にまとめられている。また②においては離散空間における実ハーディ空間の離散ラドン変換像決定した.

(3) 補間理論について：(1)で述べたようにヤコビ解析に対する実ハーディ空間はAbel変換をとることにより、Euclid 空間における Tribel-Lizorkin 空間に対応する。よって Tribel-Lizorkin 空間に関する補間定理を引き戻せばヤコビ解析における補間定理が得られる。このようにして類型は得られるのだが、問題点として、補間空間がきちんと L^p
に成るのかが若干議論の余地があり、論文発表には至っていない。

(4)不確定性原理の一般化について：(1)、(2)の過程においてヤコビ変換を詳細に調べることが必要となった。とくに不確定性原理やハーディ型の定理の類型がヤコビ変換や他の変換においても成立するかを詳しく調べた。ヤコビ変換に関する不確定性原理は、事項主な論文の⑧、⑨で調べた。とくに⑧では宮地型の定理の類型を求めた。また元の Euclid 空間における宮地型の定理も改良する余地があることが分かり、⑤で

Euclid 空間における宮地型の定理の精密化を行った。
さらに④、⑥では今後の発展性を踏まえ，Dunkl 変換の場合にも類型が成立することを
確かめた。
　以上が主な研究成果である。当初の目標の波動方程式の L^p $評価への応用が論文を発表するには至っていない。

5．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計 9 件）

① 河添 健，ヤコビ解析における実 Hardy 空間－調和解析の発展と Hardy 空間，数学，
査読有，日本数学会編集，岩波書店，No.1, Vol.64 (2012), 1--23.
② Ahmed Abouelaz and Takeshi Kawazoe, Characterizations of function spaces by
the discrete Radon transform, Integral Transform, Spec. Funct., 査読有, DOI: 10.1080/10652469. 2011.618928. (2011)
③Takeshi Kawazoe, Atomic decomposition of a real Hardy space for Jacobi analysis, Adv. Pure Appl. Math., 査読有, Vol.2 (2011), 389--404.
④ F. Chouchene, Radouan Daher, Takeshi Kawazoe and Hatem Mejjaoli, Miyachi's theorem for the Dunkl transform, Integral Transform. Spec. Funct., 査読有 ,No.3, Vol.22 (2011), 167--173.
⑤ Takeshi Kawazoe, Jianming Liu and Akihiko Miyachi, Refinements of the Hardy and Morgan uncertainty principles,
Scientiae Mathematicae Japonicae, 査読有, No.1, Vol.73 (2011), 81--87.
⑥ Takeshi Kawazoe and Hatem Mejjaoli
Uncertainty principles for the Dunkl transform, Hiroshima Math., J., 査読有, No.2, Vol.40 (2010), 241--268.
⑦ Takeshi Kawazoe, H^1 estimates of Littlewood-Paley and Lusin functions for Jacobi analysis, Anal. Theory Appl., 査読有, No.3, Vol.25 (2009), 209--229.
⑧ Radouan Daher, Takeshi Kawazoe and Hatem Mejjaoli, A generalization of Miyachi's theorem, J. Math. Soc. Japan, 査読有, No.2, Vol.61 (2009), 551--558.
⑨Takeshi Kawazoe, Uncertainty principle for Jacobi transform, Tokyo J. Math., 査読有, Vol.31 (2008), 127--246.

〔学会発表〕（計 11 件）

① Takeshi Kawazoe, Developments of real Hardy Spaces 北京大学数学教室，北京（中国), 2012 年 3 月 2 日
② 河添健, 離散ラドン変換について,
実解析学シンポジウム 2011, 信州大学, 2011 年 11 月 5 日
③ Takeshi Kawazoe, Discrete Radon transform II, 北京大学数学教室，北京（中国), 2011 年 9 月 5 日
④ Takeshi Kawazoe, Discrete Radon transform, 北京大学数学教室，北京（中国), 2011 年 3 月 6 日
⑤ Takeshi Kawazoe, Difference formula and orthogonality of Jacobi polynomials,
Harmonic Analysis and Orthogonal Systems IV, Stefan Banach International Mathematical Center, Bedlewo (Poland),
2010 年 9 月 23 日

⑥ Takeshi Kawazoe, Refinements of Hardy and Morgan uncertainty principles,
ICM Satellite Conference in Harmonic Analysis, National Institute of Science Education and Research, Bhubaneswar (India), 2010 年 9 月 2

日

⑦ Takeshi Kawazoe, (1) Characterization of Hardy spaces by discrete Radon transform, (2) Weyl-Poisson transform on SU(1,1), Harmonic Analysis and Integral Geometry 国際会議, Hassan II 大学,

Casablanca (Morocco) 2010年6月28日--29日

⑧ Takeshi Kawazoe, Hardy space for Jacobi analysis and its applications,

Geometric and Harmonic Analysis on Homogeneous Spaces, 日本－チュニジア交流セミナー, Sfax (Tnisia), 2009年11月6日

⑨ Takeshi Kawazoe, Atomic decomposition of Hardy spaces for Jacobi analysis,

Harmonic Analysis and Partial Differential Equations with Applications, 国際会議, 北京師範大学,

北京 (中国) 2009年5月27日

⑩ Takeshi Kawazoe, H^1 estimates of Littlewood-Paley and Lusin functions for Jacobi analysis, Operator Algebras and Harmonic Analysis 国際会議, 広州大学,

広州 (中国) 2008年12月14日

⑪ Takeshi Kawazoe, Real Hardy spaces for Jacobi analysis, Nancy I 大学数学教室, Nancy (France) 2008年6月19日

6．研究組織

(1)研究代表者
河添　健 (KAWAZOE TAKESHI)
慶應義塾大学・総合政策学部・教授
研究者番号：90152959

(2)研究分担者
該当なし

(3)連携研究者
該当なし

(4)研究協力者
① 中井　英一 (NAKAI EIICHI)
茨城大学・理学部・教授
研究者番号：60259900
② 宮地　昌彦 (MIYACHI AKIHIKO)
東京女子大学・現代教養学部・教授
研究者番号：60107696
③ J-Ph. Anker：Universite d'Orleas, Bâtiment de Mathématiques, 教授
④ K. Koufany：l'Universite Henri Poincare, Nancy I, Professor
⑤ L. Peng：北京大学・数学科学学院・教授
⑥ Lie Heping：北京大学・数学科学学院・教授
⑦ Lie Jianming：北京大学・数学科学学院・助教授
⑧ R. Daher：University Hassan II, Faculty of Sciences, 教授
⑨ A. Abouelaz：University Hassan II, Faculty of Science, 教授
⑩ M. Sifi：Campus Universitaire, Faculty of Sciences of Tunis, 教授
⑪ M. Voit：Univaerstat Dortmund, Fachbereich Mathematik, 教授
⑫ M. Rosler：TU Clausthal, Department of Mathematics, 教授