

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成 24 年 5 月 2 日現在

機関番号：14301

研究種目：若手研究(A)

研究期間：2008 年 ～ 2011 年

課題番号：20684001

研究課題名（和文） 高次元代数多様体の双有理幾何学

研究課題名（英文） Birational geometry of higher-dimensional algebraic varieties

研究代表者 藤野 修 (FUJINO OSAMU)

京都大学・大学院理学研究科・准教授

研究者番号：60324711

研究成果の概要（和文）：私は主に高次元代数多様体の双有理幾何学を研究した。混合ホッジ構造の理論を用いて様々な消滅定理を得た。これら新しい消滅定理により、私は対数的標準対についての極小モデル理論の基礎定理を確立した。また、アバンダンス予想、孤立した対数的標準特異点、混合ホッジ構造の変形等も研究した。上記の研究に加えて、私はトーリック幾何学、特異点を持った代数曲面、小平の標準束公式の一般化などに興味がある。

研究成果の概要（英文）：I mainly studied the birational geometry of higher-dimensional algebraic varieties. I obtained various vanishing theorems by using the theory of mixed Hodge structures. By these new vanishing theorems, I established the fundamental theorems of the minimal model theory for log canonical pairs. I also studied the abundance conjecture, isolated log canonical singularities, variations of mixed Hodge structure, and so on. In addition to the above mentioned studies, I am interested in the toric geometry, singular algebraic surfaces, generalizations of Kodaira's canonical bundle formula, and so on.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2008 年度	2,400,000	720,000	3,120,000
2009 年度	2,500,000	750,000	3,250,000
2010 年度	2,500,000	750,000	3,250,000
2011 年度	2,200,000	660,000	2,860,000
年度			
総計	9,600,000	2,880,000	12,480,000

研究分野：代数幾何学

科研費の分科・細目：数学・代数学

キーワード：極小モデル、消滅定理、アバンダンス予想、標準束公式、トーリック幾何学、混合ホッジ構造、

1. 研究開始当初の背景

まず軽く歴史を述べたい。代数多様体を双有理的に分類することが代数多様体論の中心的な問題の一つである。1次元、つまり、曲線の場合は、すでに19世紀に研究されている。2次元、つまり、曲面の場合も、19世紀

後半から20世紀前半にかけてのイタリア学派の研究で様々なことが分かっていた。これらの話は古典的な話と言って良いと思う。20世紀半ばの小平による複素解析曲面論、シャファレヴィッチを中心とするモスクワのグループの研究等で代数曲面の双有理分類論はほぼ満足のいく形になっている。60年代には

広中が一般次元代数多様体の特異点解消定理を証明し、70年代には飯高を中心に3次元以上の代数多様体の双有理分類論が始まった。80年代には森理論と呼ばれる高次元代数多様体の極小モデルを探す一般的な枠組みが建設され、森のフリップ定理で3次元極小モデルの存在が示された。私が研究を始めた90年代後半は、3次元では大体の予想が解決済みで、4次元以上はほとんど手つかずの状態であった。21世紀になってショクロフ氏が4次元以上の双有理分類論に革命的なアイデアをいくつか提供した。このショクロフ氏のアイデアを理解し、吸収し、発展させることが大きな課題であった。これが2004年ぐらまでの話である。次の大発展は突然やってきた。2005年あたりからヘイコン氏とマッカーナン氏がショクロフ氏のアイデアと乗数イデアル層の理論を駆使して未解決問題を次々と解決していった。本科研費の申請書を書いていたころも、未解決問題がどんどん解けていっている状態であった。一番大きな結果は、代数多様体の標準環の有限生成性である。90年代後半には当分の間解決出来ないと思われていた問題である。ただ、まだまだ未解決の部分も多く、極小モデル理論の完全解決には更なる研究が必要だと考えられていたと思う。例えば、現在最も重要な未解決問題と思われるアバンドランス予想は全く手つかずの状態であったし、極小モデル理論の枠組みを対数的標準対や半対数的標準対まで拡張するという試みも不十分であった。これらの問題は極小モデル理論の完全理解と様々な応用のためには避けて通れない問題だと思われる。今後数年間でどこまで理論が発展するのだろうか？私はなにか貢献することが出来るのだろうか？と不安と期待が入り交じる状態だったと記憶する。

2. 研究の目的

究極の目標は極小モデル理論の完成である。もちろん、高々数年の研究で最終解決まで到達出来るほど甘くないのが現実である。すでに述べたように、代数多様体論の目標の一つは代数多様体を双有理的に分類することであり、双有理分類のための標準的な枠組みの一つが極小モデル理論である。森による画期的な仕事を起源に持つこの理論は、森理論と呼ばれることも多い。極小モデル理論はそれ自体価値があると思うが、代数多様体のモジュライ問題、特異点の研究などにたくさんの応用が期待されている。私自身は極小モデル理論の完成に少しでも貢献出来るように研究をしながら、極小モデル理論の他分野への応用も同時に考えていきたいと思っている。

3. 研究の方法

極小モデル理論と一口に言っても、様々なアプローチが考えられる。私はここ数年、最も王道と思われる方法を詳しく調べてきた。極小モデル理論ではコホモロジーの消滅定理が非常に有効に使われてきた。大半の研究者は消滅定理の使い方に習熟し、巧妙な使い方を見つけることに多大なエネルギーを費やしているように思われた。私はそのような方法をとらず、コホモロジーの消滅定理自身を詳しく調べ、コホモロジーの消滅定理そのものを理解し拡張する方向を選んだ。解析的な手法や、トーリック多様体上での実験的な研究を経て、代数多様体のコンパクト台コホモロジーに入る混合ホッジ構造に行き着いた。コンパクト台コホモロジーの混合ホッジ構造が正しい消滅定理の一般化を与えることを発見した。この理論の整備と必要な技術の開発に研究時間の大半を費やした。最近はまだ積極的に研究はしていないが、解析的手法やトーリック幾何学、正標数を使ったテクニックなどにも興味はある。

4. 研究成果

上で述べたように、コンパクト台コホモロジーに入る混合ホッジ構造を使って様々なコホモロジーの消滅定理を証明した。その応用として、極小モデル理論の基礎定理も確立した。従来までの枠組みより簡単で、強力な結果が得られるという理想的な発展であると思うが、新しい理論は今までの理論の最初の部分からの変更を要求しており、まだ十分な理解者と賛同者を得られていないのが現状である。この新しい枠組みの応用としては、孤立した対数的標準特異点の研究や、悪い特異点を許した代数曲面の極小モデル理論の確立などがある。これら以外の研究もいろいろとおこなった。東京大学の権業さんとアバンドランス予想についての共同研究をおこなった。この研究はこの方面では最良の結果であると思う。東京大学の高木俊輔さん（当時は九州大学）と3次元孤立対数的標準特異点の共同研究もおこなった。また、東京電機大学の藤澤さんとは、コンパクト台コホモロジーに入る混合ホッジ構造の変形理論を共同で詳しく調べた。今後この藤澤さんとの共同研究で得た話を極小モデル理論に持ち込むことで確実に成果を上げられると思っている。現在すでにいくつかの応用の研究をはじめている。これら共同研究の成果はすでに論文としてまとめ、投稿中である。

主な発表論文欄の論文について少しコメントしておきたい。論文①では極小モデル理論の基礎定理を対数的標準対に対してすべて証明した。従来のX論法と呼ばれる方法と乗数イデアル層の理論の良い部分を発展さ

せた形になっている。これを可能にしたのは、新しい強力な消滅定理である。論文①の主なアイデアは論文④で得られたものである。②は孤立した対数的標準特異点を扱っている。特異点解消に出てくる食い違い係数 -1 の因子達のなす双対複体を主に扱っている。80年代や90年代の特異点の研究を補完する結果である。論文③は特殊な場合の極小モデル理論を論じている。最近の極小モデル理論の発展の成果の一つである。論文⑤では4次元の対数的標準環の有限生成性を証明している。この結果は現在のところ最良で、5次元以上では非常に難解な未解決問題として残っている。論文⑦では川又の定理に従来とは異なる全く新しい証明を与えている。もともとの川又の証明は間違っており、約20年間間違いが放置されていた。今回の私の証明で安心して川又の定理が使えるようになった。⑧、⑨、⑩は新しい強力な消滅定理の有効性を示した論文である。従来方法では全く近寄れなかった問題も、コンパクト台コホモロジーの混合ホッジ構造から得られる消滅定理を駆使すれば簡単に証明することが出来る。⑦は擬対数的多様体の理論の解説記事である。

まだ業績欄には書けないが、これら以外にも投稿中のプレプリントが多数あることを注意しておきたい。論文のオリジナリティーが高くなればなるほど、論文が雑誌にアクセプトされるまでの時間が長くなっているような印象を受ける。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 10 件)

- ① Osamu Fujino, Fundamental theorems for the log minimal model program, Publ. Res. Inst. Math. Sci. 47 (2011), No. 3, 727–789.
- ② Osamu Fujino, On isolated log canonical singularities with index one, J. Math. Sci. Univ. Tokyo 18 (2011), 299–323.
- ③ Osamu Fujino, Semi-stable minimal model program for varieties with trivial canonical divisor, Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci. 87 (2011), no. 3, 25–30.
- ④ Osamu Fujino, Non-vanishing theorem for log canonical pairs, J. Algebraic Geom. 20 (2011), no. 4, 771–783.
- ⑤ Osamu Fujino, Finite generation of the log canonical ring in dimension four, Kyoto Journal of Mathematics, Vol. 50, No. 4

(2010), 671–684.

- ⑥ Osamu Fujino, Introduction to the theory of quasi-log varieties, Classification of Algebraic varieties, 289–303, EMS Ser. of Congr. Rep. Eur. Math. Soc., Zurich, 2010.
- ⑦ Osamu Fujino, On Kawamata’s theorem, Classification of Algebraic varieties, 305–315, EMS Ser. of Congr. Rep. Eur. Math. Soc., Zurich, 2010.
- ⑧ Osamu Fujino, Theory of non-lc ideal sheaves: basic properties, Kyoto Journal of Mathematics, Vol. 50, No. 2, (2010), 225–245.
- ⑨ Osamu Fujino, Effective base point free theorem for log canonical pairs, II. Angehrn–Siu type theorems, Michigan Math. J. 59 (2010), 303–312.
- ⑩ Osamu Fujino, Effective base point free theorem for log canonical pairs---Kollar type theorem, Tohoku Math. J. 61 (2009), 475–481.

[学会発表] (計 12 件)

- ① Osamu Fujino, On isolated log canonical singularities with index one, 特異点論とそのひろがり, 2011年8月22日, 京都大学
- ② Osamu Fujino, Fundamental theorems for the log minimal model program, Analytic aspects of complex algebraic geometry, 2011年2月15日, フランス CIRM
- ③ Osamu Fujino, Vanishing theorems and their applications, Miniworkshop of Algebra, 2011年1月11日、12日, 台湾大学
- ④ Osamu Fujino, Minimal model theory for log surfaces, Workshop Birational Geometry, 2010年12月10日, ICMS, エディンバラ
- ⑤ 藤野 修, 代数多様体に対する消滅定理, 京都大学談話会, 2010年4月21日, 京都大学
- ⑥ Osamu Fujino, Vanishing theorems for algebraic varieties, Invariants in Algebraic Geometry, 2009年11月9日, 東京大学

⑦ Osamu Fujino, Log minimal model program I, II, III, アバンダンス予想の代数, 解析的両面からの研究, 2009年9月14日, 15日, 京都大学

⑧ Osamu Fujino, Vanishing and torsion-free theorems for algebraic varieties, International Conference of Mathematics, 2009年7月7日, National Taiwan University (台湾)

⑨ Osamu Fujino, Vanishing theorem and non-vanishing theorem for log canonical pairs, Hodge 理論と代数幾何学, 2009年7月2日, 京都大学数理解析研究所

⑩ Osamu Fujino, Introduction to the log minimal model program, Workshop on Complex Geometry, 2009年9月10日, Korean Institute for Advanced Study

⑪ 藤野 修, 極小モデル理論と消滅定理, 日本数学会秋季総合分科会特別講演, 2008年9月25日, 東京工業大学

⑫ 藤野 修, 極小モデル理論, 名古屋大学大学院多元数理科学研究科, 大談話会, 2008年7月9日, 名古屋大学

[その他]

ホームページ等

<http://www.math.kyoto-u.ac.jp/~fujino/>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

藤野 修 (FUJINO OSAMU)

京都大学・大学院理学研究科・准教授

研究者番号：60324711

(2) 研究分担者

()

研究者番号：

(3) 連携研究者

()

研究者番号：