

機関番号：32641
 研究種目：若手研究(B)
 研究期間：2008～2010
 課題番号：20710120
 研究課題名(和文) ノルム制約を課したポートフォリオ最適化に対する統計的学習に基づく分析
 研究課題名(英文)
 A Statistical Learning Analysis to Norm-Constrained Portfolio Optimization
 研究代表者
 後藤 順哉 (GOTO JUNYA)
 中央大学 理工学部 准教授
 研究者番号：40334031

研究成果の概要(和文)：

本研究では、90年代以来金融実務や学術分野で注目を集める VaR と CVaR を最小化するポートフォリオ最適化問題に、ノルム制約(ないしはノルムを制限するような目的関数)を追加したポートフォリオ選択モデルを取り上げた。統計的学習モデルの1つである ν -SVM (ν -サポート・ベクター・マシン) に対する理論的結果(汎化理論)を利用し、提案するモデルの理論的な裏付けの探求と計算実験に基づく実証研究を行った。その結果、ノルム制約付きのモデルが、従来のものに比べ優れた事後パフォーマンスを達成することが示された。

研究成果の概要(英文)：

In this project, we investigate a portfolio optimization approach on the basis of the minimizations of VaR and CVaR, which have obtained a growing popularity both in practice and theory. Employing a theoretical underpinning known as the generalization theory for the ν -SVM, a statistical learning method, we empirically show that the norm-constrained versions of VaR and CVaR minimizations achieve better out-of-sample performance than the unconstrained versions.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2008年度	900,000	270,000	1,170,000
2009年度	600,000	180,000	780,000
2010年度	700,000	210,000	910,000
総計	2,200,000	660,000	2,860,000

研究分野：オペレーションズ・リサーチ、金融最適化

科研費の分科・細目：社会・安全システム科学・社会システム工学・安全システム

キーワード：ポートフォリオ最適化、VaR (バリュエ・アット・リスク)、CVaR (条件付きバリュエ・アット・リスク)、汎化誤差、ノルム制約

1. 研究開始当初の背景

DeMiguel らは最近発表した論文の中で、ポートフォリオ(資産配分)ベクトルの 1-、ないし 2-ノルムを一定値以下に抑えるという「ノルム制約」を課した「分散」最小化モ

デルを提示し、それらが従来「統計的学習」の分野で、推定すべきパラメータ・ベクトルの「shrinkage」として知られてきたテクニックと同様の作用をもたらし、結果、推定量としてのポートフォリオの推定誤差を減少させるものであることを指摘した。また、複

数の実データを用い、いくつかの既存モデルと事後パフォーマンスを比較した結果、優れた結果を示したと報告している。

2. 研究の目的

本研究では DeMiguel らの研究に動機を得て、彼らの研究をポートフォリオ選択、および統計的学習それぞれの領域の中でより新しい概念と結びつけ、拡張することを目指したものである。具体的には、

- (1) 従来からリスクの尺度として「分散」が用いられてきたが、近年注目されている、損失分布の裾部分に着目した「VaR」や「CVaR」を最小化するポートフォリオ選択モデルにおいて、ポートフォリオ・ベクトルのノルム制約、あるいは、ノルムを制限する要素を組み込むことを提案している。
- (2) DeMiguel らが対象とした古典的な分散最小化モデルにない特徴として、統計的学習モデルの1つである「SVM (サポート・ベクター・マシン)」に対する理論的結果を利用する。

といった点が、当初の目論見としてあった。3年に亘る当該プロジェクトの結果、これらの特徴を、より多面的に拡張し、分析することができた。以下では、研究の方法と成果の順番で、その概要を述べる。

3. 研究の方法

本研究は大きく、(a) 理論的分析と (b) 計算・実証分析の2つの方法を用いている。

- (1) 理論分析については、統計的学習において、SVM に対する汎化理論として知られるノンパラメトリックな損失確率にかかわる不等式を適用した。理論的結論の多くは、汎化理論に詳しい武田朗子講師（慶應義塾大学）とディスカッションを通じてまとめた。また、得られたノルム制約付き VaR 最小化、同 CVaR 最小化に対する、ロバスト最適化の文脈における解釈を導く際にも、武田講師とのディスカッションに基づいて導出を行った。次の (b) に述べる関連するアルゴリズムとその収束性などについても同様である。
- (2) 計算・実証分析については、提案アルゴリズムを計算機上で実装したり、

専用ソルバー (IBM CPLEX) を利用して求解をしたりして、ノルムを制限する要素を持たない既存モデルと比較実験を行った。実験に際しては、パラメトリックな分布に従う疑似乱数を用いた実験と、東京株式市場の実データを用いた実験の2つから構成した。今回用いた汎化理論が、ノンパラメトリックな分布に対する非常に緩い根拠しか与えていないと考えられるため、パラメトリックな分布についてどれくらい性能が認められるか不明であったこと、ノンパラメトリックな理論とは言え、i. i. d. 分布であることを前提としているので、i. i. d. 分布であるという前提の成立が不明な実データに対してどれくらい有効であるかという点が不明であったことによる。

4. 研究成果

初めに取り組んだ研究では、統計的学習（あるいは機械的学習）の分野で、90年代以降脚光を浴びているサポート・ベクター・マシン (SVM) の1つである ν -SVM と、CVaR 最小化ポートフォリオモデルの類似性に動機を得たものである。具体的には、SVM の予測性能に関する理論である「汎化理論」の1つを、ほぼダイレクトにポートフォリオ最適化の文脈に適用した。それはノンパラメトリックな仮定の下でポートフォリオ損失が一定以上になる確率の上限値を小さくすることを指向したモデルであったが、ポートフォリオのノルムと経験的 VaR あるいは経験的 CVaR の比を最小化する分数最適化問題を導出した。

理論的な含意の強さに関しては、VaR のモデルの方が、CVaR のモデルより強い結果が導かれた。しかしながら、経験的 VaR 最小化自体非凸最小化であり、求解に大変な時間を要する一方、経験的 CVaR 最小化は凸性を有し、経験的 VaR 最小化に比べ計算上優位性を持っている。また、経験的 CVaR を基にした分数最適化は、「Roy の安全第一基準モデル」として知られる、正規分布下の古典的な損失確率最小化モデルを特殊ケースとして含んでいるなどの魅力もある。

一方で経験的 CVaR を用いた場合でも、CVaR の信頼水準パラメータ β の値によって (β が 1 に近いとき) 問題の持つ非凸性を扱わなくてはいけないことがわかった。そこで、そのような非凸性と対峙しなくてはならない場合には、ノルム制約を線形近似した問題を繰り返し解くことで解を改善していく切除平面法という、局所探索アルゴリズムを提案し

た。

実際、CVaR や VaR に含まれるパラメータ β のチューニングを行うために分数最適化を何度も解く必要があるが、そのようなチューニングにかかる時間も含めて、CVaR を用いた場合には実用的な時間でポートフォリオの求解が可能であることが実験的にわかった。

表 1 は実データを基にした 136 問題に対する CVaR ベースの分数計画において、チューニングの結果選ばれたパラメータ β の値と問題が凸 (convex) であるか非凸

(nonconvex) であるかの分類を資産数 n ごとにまとめたものである。これを見ると、 β が大きいほど非凸な問題を解く必要が生じていること、チューニングの結果選ばれた β の中で、非凸性を示した数が少なくないことなどがわかる。標準的な SVM では意図的に非凸な状況を排除しているが、今回の結果によれば、計算の便利さのために非凸性を排除することで、予測性能を犠牲にしている可能性が示唆された。

表 1：凸性と非凸性の分類と β の関係

Termination Step		Chosen Value of β					total
		0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	
$n = 20$	Step 1. (convex)	38	11	17	15	5	86
	Step 2. (nonconvex)	0	0	0	4	46	50
	total wrt. β	38	11	17	19	51	136
$n = 60$	Step 1. (convex)	41	7	26	15	10	99
	Step 2. (nonconvex)	0	0	0	3	34	37
	total wrt. β	41	7	26	18	44	136
$n = 100$	Step 1. (convex)	22	27	15	31	10	105
	Step 2. (nonconvex)	0	0	0	2	29	31
	total wrt. β	22	27	15	33	39	136

図 1 は汎化理論で示唆される損失確率の上限を小さくするための CVaR に基づく分数最適化と、経験的な損失確率の最小化について、事後的な損失確率 (実際の損失頻度) 分布を比較した結果の一例である。図から、前者の方が、閾値 (横軸) によらず事後的に小さい損失確率 (縦軸) が得られていることがわかる。

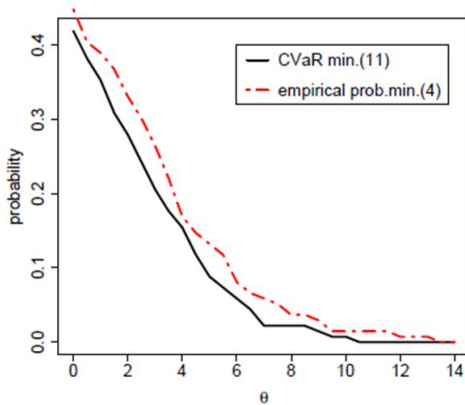


図 1：事後的な損失頻度分布の比較

分数最適化で CVaR を採用し、近似アプローチを許容すれば、比較的効率的に非凸性を攻略できるとは言え、非凸性を考慮することで計算が簡便でなくなり、実用性という点での魅力が減じることも事実である。そこで続く研究ではこれまで汎化理論を最も素朴な形で適用してきた部分を少し粗く評価することで、ノルム制約を課した経験的 VaR、経験的 CVaR 最小化に対する理論的裏付けとして採用した。また、先の研究では Markowitz タイプのポートフォリオ選択であったが、この研究では、トラッキング・ポートフォリオへと拡張した。これは、Markowitz タイプのポートフォリオ選択が SVM の文脈で言う外れ値検出型 (1-クラス型) の状況設定に対応していたのに対して、このトラッキング・モデルはいわゆる「サポート・ベクター回帰」と呼ばれる、回帰分析の状況設定に対応させたものである。このように拡張した下でも汎化理論を適用できること、ノルム制約に対する緩い根拠を与えることができたことが、2 つ目の研究の理論的な貢献の 1 つ目である。

この研究ではさらに、ノルム制約と空売り禁止制約との類似性や、ノルム制約 (あるいはそれを罰金項として目的関数に加えたもの) をある種のロバスト VaR 最小化、CVaR 最小化問題としてみなすことができることなどを示した。この結果、従来想定していた SVM の汎化理論の適用以外に、ロバスト最適化との関係を確立することができ、「ノルム制約」「SVM」「ロバスト最適化」の 3 つの間の密接な関係を見出すことができた。

図 2、3 は日経平均採用銘柄を使って日経平均をトラックした場合の事後的なトラッキング・エラー (MSE) を、CVaR をベースにしたモデル (CVaR) と絶対偏差をベースにしたモデル (AbsDev) について計算・比較したものである。図 2 は非負制約を課した場合 (空売りを認めない場合)、図 3 は非負制約なしの場合 (空売りを認める場合) の結果をしめしている。図 3 から、非負制約がない場合においても、ノルム制約が事後パフォーマンスを改善

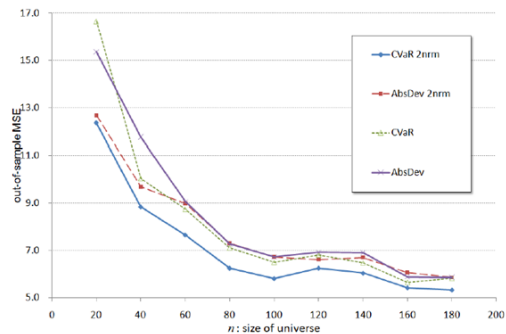


図 2：非負制約を入れた場合の事後 MSE

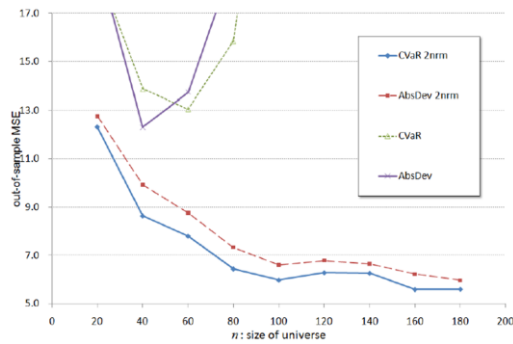


図 3：非負制約なしの場合の事後 MSE

していること、絶対偏差モデルに比べて CVaR モデルの方がどの資産数 n についても、事後的な MSE を小さくできていることなどがわかる。また、非負制約はノルム制約の一種であることを指摘したが、図 2 を見ることで、非負制約だけでなく、ノルム制約を加えることで事後的な MSE はさらに改善することもわかった。

ここまでの 2 つの研究ではノルム自体は何でもよく、数値実験ではユークリッド・ノルムを採用していた。しかし、どのノルムを採用するかという問題も残る。実際、なんでも良いとするよりは、実用的な観点から適当なノルムを提示できた方がアピールすると考えた。最終年度に取り組んだ 3 つ目の研究では、ノルムの作り方として、ファクター・モデルとして知られる、資産収益率分布の統計モデルを適用した際に現れる誤差分布の共分散構造を利用したノルムを採用した。また、先の 2 番目の研究とは違う形で、目的関数として経験的な値から得られるリスク評価のうち、最悪ケースのリスク評価を考えたロバスト最適化との類似性を指摘した。さらに、それが CVaR だけでなく、コヒレント・リスク尺度と呼ばれるクラスのリスク尺度まで広げて示した点が、追加的な貢献である。

図 4 は Fama-French の 3 ファクター・モデルを用いて、提案する誤差分布に基づくノルムを採用した罰則項付き CVaR モデルといくつかの既存モデルを実データに適用し、事後的な CVaR を比較したものである。この結果、既存の CVaR 最小化モデル (NominalCVaR と FactorCVaR) やベンチマーク・ポートフォリオ (Nikkei225 と $1/n$) と比べ、安定して低い事後 CVaR を達成していることが確認された。また、ターンオーバー (ポートフォリオの多期間運用に伴う組み替えにかかるポートフォリオ・ベクトルの変化分) も CVaR モデルの中では最も小さく抑えられることが確認された。

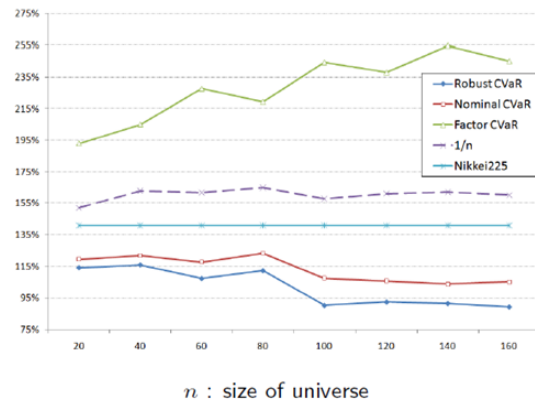


図 4：事後 CVaR ($\beta=0.90$)

以上の 3 つの研究論文を通し、様々な観点から、CVaR あるいは VaR 最小化ベースのポートフォリオ最適化に対して、ノルム制約、あるいは、同様の罰則項を課すことの意義を理論的、実証的に示した。パラメータのチューニングなど、汎用的な適用に対するヒントなどの追究など不十分な点もあるが、ノルム制約という、従来直接経済的な意味を有しないために考えられてこなかった要素を、積極的に取り入れることで、事後的なパフォーマンスを改善することを、いくつかのケースを通して示すことができたのが、このプロジェクトの最大の貢献である。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

〔雑誌論文〕(計 5 件)

Yuichi Takano, Jun-ya Gotoh Constant Rebalanced Portfolio Optimization Under Nonlinear Transaction Costs, *Asia-Pacific Financial Markets*, 査読有、Online First、2010 年、掲載決定 (印刷中)

Jun-ya Gotoh, Hui Jin and Ushio Sumita, Numerical Evaluation of Dynamic Behavior of Ornstein-Uhlenbeck Processes Modified by Various Boundaries and its Application to Pricing Barrier Options, *Methodology and Computing in Applied Probability*, 査読有、13 巻、2011 年、193-219

Akiko Takeda., Jun-ya Gotoh, Masashi Sugiyama, Support Vector Regression as Conditional Value-at-Risk Minimization with Application to Financial Time-Series Analysis 2010 IEEE International Workshop on Machine Learning for Signal

Processing, 査読有, 2010年 118-123

後藤 順哉, 武田 朗子, Improving the Out-of-Sample Performance via VaR/CVaR Minimization: A Statistical Learning Approach to Portfolio Selection, 統計数理研究所共同研究レポート 229 「最適化: モデリングとアルゴリズム」, 査読無, 22 巻, 2009 年, 36-50

Jun-ya Gotoh, Akiko Takeda, Conditional minimum volume ellipsoid with application to multiclass discrimination, Computational Optimization and Applications, 査読有, 41 巻, 2008 年, 27-51

[学会発表] (計 9 件)

Jun-ya Gotoh, K. Shinozaki, A Robust CVaR Portfolio Using Model-Based Uncertainty, INFORMS Annual Meeting, 2010 年 11 月 9 日, Austin Convention Center

Jun-ya Gotoh, K. Fujisawa, Convex Optimization Approaches for Maximally Predictable Portfolio Selection, INFORMS Annual Meeting, 2010 年 11 月 9 日, Austin Convention Center

Jun-ya Gotoh, A. Takeda, On the Role of Norm Constraints in Portfolio Selection, INFORMS Annual Meeting, 2009 年 10 月 12 日, Hilton San Diego Bayfront (米国)

Jun-ya Gotoh, A. Takeda, On the Role of Norm Constraints in Portfolio Selection, 20th International Symposium on Mathematical Programming, 2009 年 8 月 24 日, The University of Chicago, Booth School of Business (米国)

後藤 順哉, 武田 朗子, ノルム制約を課した CVaR 偏差最小化トラッキング・ポートフォリオ, 日本金融・証券計量・工学学会 夏季大会, 2009 年 7 月 30 日, 法政大学、市ヶ谷 (東京都)

後藤 順哉, 武田 朗子, ポートフォリオ最適化におけるノルム制約の役割について研究集会「最適化: モデリングとアルゴリズム」, 2009 年 3 月 25 日, 統計数理研究所 (東京)

後藤 順哉, 武田 朗子, ポートフォリオ最適化におけるノルム制約, 日本オペレーションズ・リサーチ学会 春季発表会, 2009 年 3 月 18 日, 筑波大学 春日キャンパス (茨城)

Jun-ya Gotoh, Akiko Takeda, Improving Portfolio Performance via VaR/CVaR Minimization: A Statistical Learning Approach, INFORMS Annual Meeting 2008, 2008 年 10 月 12 日, Marriott Wardman Park Hotel (ワシントン D.C., 米国)

後藤 順哉, 武田 朗子, 汎化理論に基づく VaR/CVaR 最小化ポートフォリオ選択モデル, 日本オペレーションズ・リサーチ学会 秋季発表会, 2008 年 9 月 11 日, 札幌コンベンションセンター (北海道)

[その他]

ホームページ等

<http://www.indsys.chuo-u.ac.jp/~jgoto/>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

後藤 順哉 (GOTOH JUN-YA)
中央大学・理工学部・准教授
研究者番号: 40334031