

機関番号：16301

研究種目：若手研究（B）

研究期間：2008～2010

課題番号：20740017

研究課題名（和文） 頂点作用素代数の有限性に関する研究

研究課題名（英文） Study on finiteness properties of vertex operator algebras

研究代表者

安部 利之（ABE TOSHIYUKI）

愛媛大学・理工学研究科・准教授

研究者番号：30380215

研究成果の概要（和文）：

頂点作用素代数のオービフォールド模型の  $C_2$  有限性と呼ばれる性質について研究し、可換頂点代数の巡回群によるオービフォールド模型が  $C_2$  有限性を持つための必要十分条件や 2 次の置換オービフォールド模型が  $C_2$  有限性を持つための必要十分条件を発見した。特に後者については  $C_2$  有限性を持つヴィラソロ代数に付随する頂点作用素代数はその条件をもつことを証明し、2 次の置換オービフォールド模型が  $C_2$  有限性を持つことを示した。

研究成果の概要（英文）：

I have been working on a finiteness property called a  $C_2$ -cofiniteness property, for a vertex operator algebras. A fixed point subalgebra of a vertex operator algebra by its finite automorphism group is called an orbifold model. In the representation theory of vertex operator algebra there is a conjecture that if a vertex operator algebra has the  $C_2$ -cofiniteness property then so does any orbifold model of it. I have found necessary and sufficient conditions which make the conjecture true for commutative vertex algebras and  $Z_2$ -permutation orbifold models of vertex operator algebras. I also showed that  $Z_2$ -permutation orbifold models of the Virasoro vertex operator algebras having  $C_2$ -cofiniteness property satisfy the  $C_2$ -cofiniteness condition.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2008 年度	1,100,000	330,000	1,430,000
2009 年度	900,000	270,000	1,170,000
2010 年度	1,300,000	390,000	1,690,000
年度			
年度			
総計	3,300,000	990,000	4,290,000

研究分野：代数学

科研費の分科・細目：数学・代数学

キーワード：頂点作用素代数・代数・オービフォールド

## 1. 研究開始当初の背景

頂点作用素代数は約 25 年前に導入された代数系であり ([Bo1], [FLM]), その構造や表現論が多く研究者によって研究されてきた ([FHL], [Miy2]). 頂点作用素代数は通常の代数と異なり、可算無限個の演算が定義さ

れており、それらの演算の間に更に複雑な関係がある代数系である。その代数系は共形場理論に現れる模型の数学的公理化として考えられており、その研究は理論物理特に場の理論の観点から盛んになされている。一方で有限単純群の分類に現れるモンスター群

の表現論との関連が非常に有名 ([Bo2]) で共形場理論とモンスター群という全く無関係と思われた現象をつなぐ数学的理論として数学、物理両面から研究されている。

頂点作用素代数には共形場理論の有理性に対応する概念が幾つか考えられたが、その中で重要なものの一つが本研究テーマである「 $C_2$  有限性」である。当初は既約加群の指標のもつモジュラー不変性の証明のために [Z] において、Y. Zhu によって導入された技術的な性質であった。しかし頂点作用素代数の研究が進むにつれ、その重要性が徐々に認識されてきて、現在では頂点作用素代数の表現論において中心的な概念となった。この性質を持つ頂点作用素代数の表現論の研究は現在でも活発になされている ([Miya2], [Ara])。

この「 $C_2$  有限性」については、関連する予想も多い。その中でも頂点作用素代数の有限自己同型群の固定点のなす部分代数 (オービフォルド模型) に関する次の予想

**予想:**  $C_2$ -有限性を持つ単純頂点作用素代数の有限自己同型群によるオービフォルド模型もまた  $C_2$ -有限性を持つ

は現在でも証明されていない未解決予想のひとつである。この予想は非常に応用性もあり実際に多くの具体例では成り立つことが知られている ([Yam], [Abe1])。

## 2. 研究の目的

本研究では、頂点作用素代数の表現論における有限性について主に研究する。頂点作用素代数には幾つかその有限性に関する概念があるが、そのもっとも代表的なものが「 $C_2$  有限性」であり、その有限性がなぜ成立するのかという疑問の解決が大本の研究目的である。しかし頂点作用素代数は非常に複雑な代数系であり、一般論で扱えることは非常に限られている。特に  $C_2$  有限性はまだまだわかっていないことも多く、複雑な演算が密接に関係しあって起こる現象である。従って与えられた頂点作用素代数が  $C_2$  有限性を持つかどうかは一般論、具体的な模型どちらにおいても証明することが困難である。

そこで目的をもっと絞り、最終的な目的として、上記の**予想**の解決を挙げた。その解決への出発点として次の二つの研究

- (1)  $C_2$  有限性をもつ可換な頂点作用素代数のオービフォルド模型の研究
- (2)  $C_2$  有限性及び自己同型写像と両立する頂点作用素代数の可換化の研究

に取り組む。また新しく情報を集めるために、より予想に近付いた

- (3) 置換オービフォルド模型の  $C_2$  有限性の研究

にも取り組む。上記の研究を通して得られるアイデアや成果を用いて未解決である上記の**予想**に対し肯定的な結論を出すことが最終的な目的である。

## 3. 研究の方法

本研究において、頂点作用素代数の  $C_2$  有限性を導く一般的な方法を見つけ、オービフォルド模型に適用していきたいと考えた。そのために、一般論を扱う前に、更に具体的な模型を扱い、その解決のヒントを探ることから取り組んだ。

そこでまず一年目に

- (1) 可換な頂点作用素代数の  $C_2$  有限性について研究し、生成元間の関係式と  $C_2$  有限性の関係を発見する。

という課題を設定し研究に取り組んだ。この可換頂点代数は微分を持つ可換環であることが知られており、頂点代数の諸概念は可換環論の概念に置き換えることができる。微分を持つ可換環としてその構造を調べ、そのオービフォルド模型が  $C_2$  有限性を持つための生成元間の満たすべき性質を研究した。

次に異なる観点からオービフォルド模型をとらえるために、次の

- (2) 置換オービフォルド模型について**予想**の解決を試みる。

という課題に取り組んだ。

置換オービフォルド模型は頂点作用素代数の  $n$  個のテンソル積に  $n$  次対称群  $S_n$  の自然な作用を考え、その  $S_n$  の部分群によるオービフォルド模型を考えたものである。物理の分野ではよく研究されていた ([Ba]) が、頂点作用素代数の観点から見ると、この**予想**が成立した上で成り立つことがわかる設定のもとで理論が展開されているように見受けられた。更に置換オービフォルド模型については頂点作用素代数の観点からはほとんど研究されておらず [BDM] による置換オービフォルド模型の表現と twisted 表現との圏同値に関する論文や Tuite によるモンスター群の研究への応用 [T] が知られているのみであった。このように置換オービフォルド模型の  $C_2$  有限性については全く研究されておらず、新しい構造の発見には非常に適した模型を与えることが期待できる。そこで置換

オービフォールド模型についての予想解決に向けての研究に取り組んだ。

#### 4. 研究成果

(1) 可換頂点代数のオービフォールド模型の  $C_2$  有限性について。

まず初年度は研究方法の(1)について取り組んだ。特に位数2の自己同型による  $C_2$  有限性を持つ可換頂点代数のオービフォールド模型の  $C_2$  有限性について研究し、このオービフォールドが  $C_2$  有限性を満たすための必要十分条件を見つけた。引き続き次年度に素数位数の巡回自己同型群について同様の課題に取り組む前年度の結果を拡張する形の必要十分条件を得た。本研究成果については学会発表③, ⑤, ⑥において成果発表を行った。またウィーンのエーリン・シュロディンガー研究所に一週間滞在し、研究内容の大幅な部分を集中して行った。

(2) 置換オービフォールド模型における予想の部分的解決

研究成果(1)を得るにあたり、頂点代数における可換性は非常に強い性質であり、頂点作用素代数の可換化の方法を用いても十分な情報が得られないことがわかった。そしてむしろ可換化することで消える関係式、つまり非可換性による関係式こそが、予想を成り立たせるものだと確信を持つに至った。そこで筑波大学の宮本雅彦教授からの示唆もあり、置換オービフォールド模型の研究に着手した。第2年度の後半から置換オービフォールド模型の  $C_2$  有限性について考察し始めた。まず生成元が最も少ない Virasoro 頂点作用素代数の互換に関する置換オービフォールド模型の  $C_2$  有限性について考察した。その研究では(1)で見出したアイデアが非常に有効に働き、次の成果が得られた。

「 $C_2$ -有限な Virasoro 頂点作用素代数の  $S_2$ -置換オービフォールド模型は再び  $C_2$  有限となる」

この成果は小さいながらも非常に非自明であり、置換オービフォールド模型の研究の新しい一歩であると思われる。本成果については、②において成果発表を行った。また Communications in Mathematical Physics に掲載された([Abe2])。

またその後、一般の  $C_2$  有限な頂点作用素代数の  $S_2$ -置換オービフォールド模型の  $C_2$ -有限性の証明に着手し、こちらも証明できた。その成果については①において発表した。しかしその証明には非常に複雑な計算が必要であり、計算機を用いているため、計算方法やプログラミングのチェックに時間がかかり、研究期間内には投稿することができなかった。本報告書作成中にチェックが終わった

ので、現在投稿準備中である。

本研究の最終的な研究目的である「 $C_2$ -有限な頂点作用素代数のオービフォールド模型は  $C_2$  有限である」という予想の解決にはまだまだ程遠いが、これまで具体例で個々に肯定的に証明されてきたこの予想に関して、本研究結果、特に研究成果(2)は、非常に一般的な設定で予想が肯定的に証明できた最初の結果であり、本研究結果もしくはその研究で用いたアイデアは、一般の置換オービフォールド模型に関する予想の肯定的解決、そして一般の有限群に関するオービフォールド模型に関する予想の解決に重要な役割を果たすと考えられる。

(参考文献)

[Abe1] T. Abe  
C<sub>2</sub>-cofiniteness of the 2-cycle permutation orbifold models of minimal Virasoro vertex operator algebras,  
Commun. in Math. Phys., 303, Issue 3, 825-844 (2011)

[Abe2] T. Abe  
A Z<sub>2</sub>-orbifold model of the symplectic fermionic vertex operator superalgebra,  
Math. Z., 255, No. 4, 755-792 (2007)

[Ara] T. Arakawa,  
A remark on the C<sub>2</sub>-cofiniteness condition on vertex algebras,  
Math. Z. (online first) (2011)

[Ba] P. Bantay  
Permutation Orbifolds  
Nucl. Phys. B633, 365-378 (2002)

[BDM] K. Barron, C. Dong, G. Mason,  
Twisted sectors for tensor product vertex operator algebras associated to permutation groups,  
Commun. in Math. Phys., 227, 349-384 (2002)

[Bo1] R. Borcherds  
Vertex algebras,  
Kac-Moody algebras and the monster,  
Proc. nat. Acad. Sci., U.S.A. 83, 3068-3071 (1986)

[Bo2] R. Borcherds  
Monstrous moonshine and monstrous Lie superalgebras,  
Invent. Math., 109, 405-444 (1992).

[FHL] I. Frenkel, Y. Huang, J. Lepowsky  
On Axiomatic Approaches to Vertex Operator

Algebras and Modules  
American Mathematical Society, United States, 1993

[FLM] I. Frenkel, J. Lepowsky, A. Meurman  
Vertex Operator Algebras and the Monster  
Academic Press, New York, 1988

[Miyal] M. Miyamoto  
Modular invariance of vertex operator  
algebras satisfying  $C_2$ -cofiniteness  
Duke Math. J., 122, no. 1, 51-91(2004)

[Miy2] M. Miyamoto  
Flatness and Semi-Rigidity of Vertex  
Operator Algebras, arXiv:1104.4675(2011)

[T] M. Tuite  
Monstrous and Generalized Moonshine and  
Permutation Orbifolds  
Moonshine - The First Quarter Century and  
Beyond, Proceedings of a Workshop on the  
Moonshine Conjectures and Vertex Algebras  
378-392  
London Mathematical Society Lecture Note  
Series 2010

[Yam] G. Yamskulna  
 $C_2$ -Cofiniteness of the Vertex Operator  
Algebra When  $L$  Is a Rank One Lattice  
Commun. Alg., 32, no. 3, 927-954(2004)

[Z] Y. Zhu  
Modular invariance of characters of vertex  
operator algebras  
J. Amer. Math. Soc., 9, 237-302(1996)

## 5. 主な発表論文等

(研究代表者, 研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 1 件)

安部利之,  $C_2$ -cofiniteness of the  
2-cycle permutation orbifold models of  
minimal Virasoro vertex operator  
algebras, Communications  
in Mathematical Physics, 303, Issue 3,  
825-844 (2011), 査読有

[学会発表] (計 7 件)

- ① 安部利之, On  $C_2$ -cofiniteness of  
 $Z_2$ -permutation orbifold models, 頂点  
作用素代数, 群論, 組合せ論, 2010 年 12  
月 16 日, 京都大学
- ② 安部利之, On  $C_2$ -cofiniteness of 2-cycle  
permutation orbifold models of the

Virasoro VOAs,  
日本数学会秋季総合分科会 2010 年 9 月  
22 日, 名古屋大学

- ③ 安部利之, 可換頂点代数の  $Z_N$ -オービフ  
ォールド模型の  $C_2$  有限性について,  
日本数学会秋期総合分科会 2009 年 9 月  
27 日, 大阪大学
- ④ 安部利之, On  $C_2$ -cofiniteness of vertex  
operator algebras,  
Algebras, Groups and Geometries 2009  
in Tambara, 2009 年 8 月 21 日, 群馬県  
東京大学丹原セミナーハウス
- ⑤ 安部利之, 可換頂点代数のオービフ  
ォールド模型の  $C_2$  有限性について,  
第 21 回草津セミナー, 2009 年 8 月 3 日,  
群馬県草津セミナーハウス
- ⑥ 安部利之, On  $C_2$ -cofiniteness of  
 $Z_2$ -orbifold models of vertex operator  
algebras, 有限群・頂点作用素代数と組  
合せ論, 2009 年 1 月 6 日, 京都大学
- ⑦ 安部利之, On representation theory for  
the symplectic-fermionic vertex  
operator superalgebra,  
Algebras, Groups and Geometries 2008,  
2008 年 12 月 10 日, 東京大学

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

安部利之 (ABE TOSHIYUKI)  
愛媛大学・理工学研究科・准教授  
研究者番号: 30380215

### (2) 研究分担者

なし

### (3) 連携研究者

なし