

## 自己評価報告書

平成21年 5月 6日現在

機関番号：14501

研究種目：若手研究 (B)

研究期間：2008～2011

課題番号：20740018

研究課題名 (和文) 放物型概均質ベクトル空間とそのゼータ関数の整数論

研究課題名 (英文) Number theory for parabolic type prehomogeneous vector spaces and their associated zeta functions

研究代表者 谷口 隆 (TANIGUCHI TAKASHI)

神戸大学・理学研究科・講師

研究者番号：60422391

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・代数学

キーワード：代数学・整数論・ゼータ関数・密度定理・代数群

## 1. 研究計画の概要

本研究の目的は、放物型概均質ベクトル空間 (PV) について特にゼータ関数をキーワードとして、整数論、表現論、保型形式論、不変式論など多方面からの問題意識や手法を用いて研究し、深い整数論的結果を導くことである。より具体的には、密度定理やパラメータ問題の証明・新しいゼータ関数の構成・保型 L 関数の関数等式の証明やガンマ因子の決定・保型形式や L 関数の構成・Fourier 係数の数論性の証明などに取り組む。これらの研究成果はいずれも PV の理論による整数論への独自の貢献となることに、その研究動機がある。

## 2. 研究の進捗状況

以下の4点の成果を得た。

(1) 2元3次形式の空間に付随するゼータ関数について、大野-中川の関係式の類似が、他の全ての整モデルに対し存在することを発見した。重要な系として、関数等式が自己双対化される。証明の基本方針は、もともとの大野-中川の関係式に帰着することである。これは、大野泰生氏 (近畿大)・若槻聡氏 (金沢大) との共同研究である。

(2) 2元3次形式の空間に付随するゼータ関数を正標数の大域体上で考察し、関数体の種数が  $0, 1$  の場合に大域ゼータ関数の明示公式を得た。これは、関数等式によって分母子の次数を決めた後、留数公式によって係数を決定することで証明される。

(3) 概均質ベクトル空間の自然な L 関数の一種として「軌道型 L 関数」が定まることを発見し、この研究を進めた。一般論を構築すると共に、2元3次形式の空間の場合に軌道型

L 関数の解析的性質を詳しく調べた。

(4) 次数を決めて代数体の判別式の密度を求めることは、整数論では古典的な問題である。3次の場合には Davenport-Heilbronn によって第1の主要項が得られており、その後の研究により第2の主要項の存在が予想されていたが、この予想を解決した。証明には2元3次形式の概均質ベクトル空間のゼータ関数を用いる。また、等差数列中の判別式の分布に偏りがでることが分かった。例えば判別式が  $X$  以下で  $a \pmod{7}$  となる3次体の個数の式は、 $a$  ごとに異なるものになる。これは上記の軌道型 L 関数が、3次指標で捻ったときに  $s=5/6$  での極が消えずに残ることの帰結として得られる。分布に偏りが出ると予想される整数論的対象はいくつか知られているが、実際にその偏りが証明されるのは比較的珍しいと思われる。

## 3. 現在までの達成度

①当初の計画以上に進展している。

(理由) 上述の (2), (3) の成果は研究計画に沿った基本的な成果だが、(1) ですべての整モデルに対して公式を発見したこと、(4) で注目を集めていた未解決問題をより一般的な形で解決し、新たな問題意識をもたらしたことは、当初の計画以上の進展と断言してよいように思う。

## 4. 今後の研究の推進方策

以下を基本課題とする。

(1) 3次体の判別式の密度定理において、誤差項の評価を改良する。また、相対3次拡大の密度定理へと拡張する。

(2) ゼータ関数の理論を余正則空間の場合

へと拡張する.

5. 代表的な研究成果

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計2件)

- (1) Takashi Taniguchi, 高次合成則入門, 数理解析研究所講究録別冊, 査読あり, 印刷中
- (2) Yasuo Ohno, Takashi Taniguchi, Satoshi Wakatsuki, Relations among Dirichlet series whose coefficients are class numbers of binary cubic forms, Amer. J. Math. 131-6(2009), 査読あり.

[学会発表] (計20件)

- (1) Takashi Taniguchi, Orbital L-functions for the space of binary cubic forms, 研究集会『Second international workshop on zeta functions in algebra and geometry』, スペイン, マヨルカ島, 2010年5月.
- (2) 谷口隆, 2元3次形式の空間に付随するゼータ関数の代数的関数等式, 第54回代数学シンポジウム, 明治大学, 2009年8月.
- (3) Takashi Taniguchi, Relations among Dirichlet series whose coefficients are class numbers of binary cubic forms, 研究集会『Higher Degree Forms Conference』, フロリダ大学, 米国, 2009年5月.
- (4) Takashi Taniguchi, Exceptional groups and Sato-Shintani's zeta functions, 研究集会『Workshop on Shimura Varieties, Automorphic Representations and Related Topics』, 京都大学, 2009年11月.
- (5) Takashi Taniguchi, Extra functional equations of zeta functions of binary cubic forms, 研究集会『Explicit Structures in Modular Forms and Number Theory』, 近畿大学, 2009年8月.

[図書] (計0件)

[その他]

なし