

機関番号：34419

研究種目：若手研究 (B)

研究期間：2008～2010

課題番号：20740043

研究課題名 (和文) 最小軌跡による基本領域を用いた3次元双曲錐多様体の変形空間の解析

研究課題名 (英文) Analysis of deformation space of 3-dimensional cone-hyperbolic structures using fundamental domains arising from cut loci

研究代表者

秋吉 宏尚 (AKIYOSHI HIROTAKA)

近畿大学・理工学部・准教授

研究者番号：80397611

研究成果の概要 (和文)：コンパクトでない錐特異集合を持つ3次元錐多様体が許容する錐双曲構造全体からなる空間の解析理論の確立に向け、錐特異点を一点持つトーラスと区間の直積として得られる錐多様体の双曲構造を、クライン群に対するフォード基本領域の類似物として得られる基本多面体を手掛かりとして研究し、ある幾何学的なパラメータづけを得た。これは、Tan氏らにより指標多様体の力学的性質の観点から定義された空間のパラメータづけを与えることが予想される。

研究成果の概要 (英文)：The space of cone-hyperbolic structures for the 3-dimensional cone-manifold obtained as the product of the torus with a cone-point and the real line was studied in order to establish the deformation theory of 3-dimensional cone-hyperbolic structures for cone-manifolds with noncompact cone singularity. The deformation was studied by using a variant of Ford domains in the theory of Kleinian groups. A geometric parametrization for such space was established, which is conjectured to give a parametrization for certain slice of the character variety of one-holed torus defined by Tan et al. in terms of dynamics on the variety.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2008年度	900,000	270,000	1,170,000
2009年度	700,000	210,000	910,000
2010年度	700,000	210,000	910,000
年度			
年度			
総計	2,300,000	690,000	2,990,000

研究分野：双曲幾何学

科研費の分科・細目：数学・幾何学

キーワード：幾何学, トポロジー

## 1. 研究開始当初の背景

双曲空間を局所モデルとするリーマン多様体を双曲多様体といい、その一般化として局所的に錐状の特異構造を許したものを双曲錐多様体という。コンパクトな錐特異集合を持つ双曲錐多様体の変形理論は数多くの研究者の寄与により、近年、発展してきたが、錐特異集合がコンパクトでないものの体系

だった研究はまだ始められておらず、これからの研究が待たれるところだった。

## 2. 研究の目的

コンパクトでない錐特異集合を持つ3次元双曲錐多様体の変形に関する基礎理論を、錐特異集合に関する最小軌跡を用いた双曲錐多様体の標準的分割を手がかりとして、構築

することである。その応用として、トーラスと開区間の直積において、トーラス上の一点と区間の直積を錐特異集合とする双曲錐多様体の変形空間を決定したい。

### 3. 研究の方法

穴あきトーラス上の1点で微小な錐角を持つ錐特異点つき曲面と開区間の直積により得られる3次元錐多様体の双曲構造を、穴あきトーラス群(交換子積が放物的変換であるような階数2の自由クライン群)を代数的かつ幾何的に微小変形することにより放物的変換を楕円変換へと変形することにより構成することができる。本研究では、そのような穴あきトーラス群から錐角の微小変形により得られる双曲錐多様体の基本領域を、クライン群におけるフォード基本領域の類似のものとして構成する。そのような「よい基本領域」を持つ錐双曲構造が豊富にあることを示したうえで、それらが持つクライン群論との類似の性質や表現空間における従来の研究対象と比較などを、コンピュータを用いた数値実験を通して予想し、その証明を与えていく。よい基本領域を持つような錐双曲構造に対しては、このような大規模な数値実験が可能となることにこの研究の意義がある。

### 4. 研究成果

(1) いくつかの具体例に対して穴あきトーラス群の微小変形として得られるの双曲錐多様体の最小軌跡による基本多面体の全測地的近似の候補を構成した。サーストンによる双曲デーン手術理論において用いられる双曲構造の完備性を崩した変形に対する考察は、この種の微小変形へも応用できるので、これまでに見つけることのできた具体例の持つ性質をさらに詳しく観察することにより、任意の穴あきトーラス群から錐角の微小変形により得られる双曲錐多様体の最小軌跡による基本多面体の全測地的近似の候補も構成できると期待される。これまでに見つけた候補は、変形前の穴あきトーラス群のフォード領域の微小変形として構成されるが、その構成法からは錐角の変形が大きくなった時にも同様の手法を用いることができるのかどうかかわからない。そこで今年度購入したワークステーションを用い、全測地的近似の候補が実際にどの程度まで変形可能なのかを探るための数値実験を継続的に行っている。

(2) (1)で得られた、一点穴あきトーラス群の主カスプに対応する放物型元を楕円型元へと微小変形して得られる群に対する考察を深め、一般の楕円型元へと変形した場合に得られる穴あきトーラス群の既約  $PSL(2, C)$  表現からなる空間に対する幾何学的なパラ

メータ付けを得た。その応用として、それらの表現に対する「基本領域」の予想を一般の錐角に対する表現のものへと一般化した。

(3) (2)で得られた候補を用いて、錐双曲構造のホロノミー写像として得られることがわかる表現に関するある判定法を開発し、計算機実験を通して穴あきトーラスクライン群に対するマスケット切片に対応する表現空間の切片を考察した。この実験では錐角をパラメータとして「マスケット切片」の連続変形族が得られることが期待されるような興味深い結果が得られた。さらに、この経過を名古屋大学で行われた「リーマン面・不連続群論」研究集会において発表したところ、奈良女子大学の山下靖氏から、氏と S. P. Tan 氏(シンガポール)の共同研究における実験結果との興味深い類似性が指摘された。(彼らの研究により得られた表現論的なアルゴリズムと本研究で進められている幾何的な判定法が同じ結果を与えることが期待される。)現状では数値実験に基づく予想の段階であるが、これまでに観察された事実は、錐特異構造を持たないなめらかな双曲幾何に対応するクライン群論の結果として得られていたものと同種の結果が期待を強く示唆している。

(4) (3)で得られた数値実験結果には奈良女子大学の山下靖氏の実験結果との興味深い類似性があった。山下氏の数値実験はシンガポール国立大学の S. P. Tan 氏との共同研究の一つとして行われたものである。2010年8月にシンガポール国立大学に滞在し、Tan 氏、山下氏とこの類似性について議論をし、(3)で行ったものよりもさらに詳細な数値実験を進めた。まず彼らの実験結果との直接的な比較をするために、私が導入した幾何学的なパラメータと彼らの用いる表現の指標によるパラメータとの変換を記述した。その変換を用いて改めて Tan-山下による力学的な観点からの“よい”変形空間と、標準的な基本領域を用いて定義される幾何学的な変形空間を比較したところ、それらが数値的には同一であるという驚くべき観察が得られた。

クライン群論的に取り扱うことが可能な、有理的な錐角を持つ離散的な表現に対しては、幾何的な変形空間が力学的な変形空間に含まれることは自然であるが、一般の錐角においても、逆が成り立ちそうであるということは研究開始以前には想像すらできなかったことで、その証明(もしくはさらに精密な研究を通しての反例の発見)は今後の重要な研究課題である。

### 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

〔雑誌論文〕(計1件)

Hirtotaka Akiyoshi, Side Parameter for the Punctured Torus Groups, Proceedings of the 16th International Conference on Finite or Infinite Dimensional Complex Analysis and Applications, 査読なし, 2009年, 58~62ページ

〔学会発表〕(計1件)

秋吉宏尚, Side parameter for the punctured torus groups, The 16th International Conference on Finite or Infinite Dimensional Complex Analysis and Applications, 2008年7月29日, Dongguk University (韓国 慶州)

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

秋吉 宏尚 (AKIYOSHI HIROTAKA)  
近畿大学・理工学部・准教授  
研究者番号: 80397611

### (2) 研究分担者 なし

### (3) 連携研究者 なし