

機関番号：34315

研究種目：若手研究（B）

研究期間：2008～2010

課題番号：20740048

研究課題名（和文）軌道体の枠付き同境界類不変量とその3次元多様体の同境界圏への応用

研究課題名（英文）Framed cobordism invariant of V-manifolds and its application to the cobordism category of 3-manifolds

研究代表者

福本 善洋（Fukumoto Yoshihiro）

立命館大学・理工学部・准教授

研究者番号：90341073

研究成果の概要（和文）：

曲面の境界は曲線である．逆に曲線は曲面の境界として実現できるだろうか．本研究は，この問いを，曲線や曲面の概念を高次元に一般化した多様体を対象として，特に3次元の多様体がどのような4次元多様体の境界として実現できるかを考察する．一般に，多様体に対し，その形をある程度まで代数的に捉えたホモロジー環とよばれる不変量を対応させることができる．そこで，古田・亀谷の不等式と呼ばれる，4次元多様体（軌道体）に対する不等式を応用することにより，3次元多様体のホモロジー環が，4次元多様体のそれとどのような関係にあるかを調べるため，松本幸夫氏によって導入された Bounding genus の一般化として，3次元多様体の間のある種の距離に当たる概念である Φ -Bounding genus を構成し，その性質を調べた．

研究成果の概要（英文）：

The boundary of a surface is a curve. Conversely, can any curve be realized as the boundary of a surface? In our research, we study this problem for objects called manifold which is a higher-dimensional generalization of curves and surfaces. In particular, we study what kind of 4-manifold has a given 3-dimensional manifold as boundary. In general, we can compute an invariant called homology ring of any manifold, which approximate the shape of manifolds by algebras. To study the relationship between the homology ring of 3-manifolds and that of 4-manifolds, we applied an inequality called Furuta-Kametani inequality of 4-dimensional manifolds (orbifolds), and introduced a kind of distances between 3-manifolds called Φ -Bounding genus which is a generalization of the notion of the Bounding genus introduced by Y. Matsumoto, and studied their properties.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合計
2008年度	1,100,000	330,000	1,430,000
2009年度	800,000	240,000	1,040,000
2010年度	800,000	240,000	1,040,000
年度			
年度			
総計	2,700,000	810,000	3,510,000

研究分野：微分位相幾何学

科研費の分科・細目：数学・幾何学

キーワード：(1) 同境界圏 (2) ホモロジー同境界群 (3) ホモロジー環 (4) V -多様体 (5) 3次元多様体 (6) 指数定理 (7) Seiberg-Witten 理論 (8) 非結合代数

1. 研究開始当初の背景

3次元多様体の同境界群は自明であるが、同境界を射とみなした同境界圏を考えると、そこに代数的な圏への関手を与える3次元の位相的場の理論といった豊かな構造が現れる。軌道体(以下、 V -多様体)の概念は、群作用による商空間として、佐武一郎氏により導入された幾何学的対象であり、近年では、超弦理論のコンパクト化に現れ、そのコホモロジー理論が整備されつつある。一方、古田幹雄氏と亀谷幸生氏は、Seiberg-Witten 方程式の有限次元近似によって得られるJacobi トーラス上の $\text{Pin}(2)$ 同変写像にK理論を展開し、 $b_1 > 0$ の4次元スピント閉多様体に対する $10/8$ -不等式を与えた。多様体の同境界圏の構造に関しては、分類空間のスペクトラムを用いたホモトピー論的なアプローチがあるが、この古田-亀谷- $10/8$ -不等式は、4次元多様体の符号数だけでなく、コホモロジー環の構造に対する制限を与える。筆者は、この枠組みを V -多様体にまで拡張し、古田幹雄氏との共同研究で導入した符号数不足指数型の不変量(w -不変量)を導入することにより3次元多様体のホモロジー同境界圏を、ホモロジー環の自己同型群を用いて調べる方法を得た。さらに副産物として、交叉積の結合性がホモロジー環の同型を誘導する同境界の障害を与えることを観測した。

2. 研究の目的

本研究の目的は、軌道体上の場の方程式の族に対する枠付き同境界類不変量の定式化を行い、3次元多様体の同境界圏の構造を解明するための枠組みを確立することにある。本研究では、特に(1) w -不変量と交叉積を用いた3次元多様

体の同境界圏の構造の解析、(2) 相互法則による符号数不足指数型不変量の組織的研究、(3) 場の方程式の族の有限次元近似と枠付き同境界類不変量の構成を目標とした。

3. 研究の方法

(1) w -不変量とBounding genus

松本幸夫氏によって導入されたホモロジー球面のbounding genusは、それを境界とする4次元スピント多様体の交叉形式に含まれる双曲型形式の最小数で表されるホモロジー同境界不変量である。一方、古田幹雄氏との共同研究で導入した w -不変量は、3次元多様体 M 、および M を境界とする4次元スピント多様体 X に対して整数の値 $w(M, X)$ をとる不変量であり、補助的な4次元スピント多様体 W を貼り合わせて得られる閉じたスピント多様体 $X \cup W$ 上のDirac作用素の V 指数 $\text{ind}_V D$ を用いて定義される。また、古田氏によって導出された $10/8$ -不等式は、スピント4次元多様体の符号数の絶対値と第2-Betti数の間の不等式を与える。筆者は、 $10/8$ -不等式の V -多様体版を用いることにより、bounding genus の下からの評価を w -不変量で与え、Brieskorn ホモロジー球面の幾つかに対して、bounding genus を決定した。実際には、上記の V -多様体 X としてBrieskorn ホモロジー球面が持つ S^1 -束に付随した D^2 - V 束をとる。以上の構成は、鉛管ホモロジー球面に対しても、 V 鉛管操作を用いて遂行することができる。これらの無限系列に対して、 w -不変量を計算し、bounding genus の下限を計算することにより、ホモロジー同境界圏の構造を調べる方法を用いた。

(2) (ホモロジー同境界) (同境界)

二つの3次元閉多様体 M, M' の間のホモロジー同境界 $(W; M, M')$ はホモロジーの同型 $\varphi: H(M) \rightarrow H(M')$ を誘導する. 逆にホモロジーの同型 φ を誘導するホモロジー同境界が存在するかという問いに対して, 筆者は古田-亀谷-10/8-不等式の V 多様体版を援用し, 同型 φ を誘導するホモロジー同境界 $(W; M, M')$ が存在するための必要条件を1次元コホモロジーの4重カップ積の構造, および M, M' の w -不変量を用いて与えた. また, 同型 φ を誘導するホモロジー同境界の存在を仮定して形式的に計算される交叉積の結合律が一般的に成り立たないことがわかり, さらに, この結合律の破綻はホモロジー同境界の存在への一つの障害を与えていることがわかる. これらの結果を一般の同境界 $(W; M, M')$ に拡張することにより, 次数付き可換環 H とその間の代数的射 $H \rightarrow H'$ に関する圏 \mathcal{L}_3 を構成することができる. さらに, 3次元多様体の同境界圏 \mathcal{C}_3 から次数付き可換環と代数的射からなる圏 \mathcal{L}_3 へのホモロジーによる関手 $\Phi: \mathcal{C}_3 \rightarrow \mathcal{L}_3$ の構成を行う. 上記の形式的交叉積の計算を用いることにより w -不変量と代数的射 L の組に対して定まるある種の次数付き多元環 A_* を構成することができる. 上記の結果によれば, 代数 A_* の構造が代数的射 L を実現する同境界の存在への障害を与えることがわかる. その一つは, 古田-亀谷-10/8-不等式の V -多様体版に現れる1次元コホモロジーの4重カップ積の構造を用いる方法であり, もう一つは, 交叉積を反映しているはずの形式的多元環 A_* の結合律が破綻する現象を用いる方法である. これらの方法を用いて形式的多元環 A_* の結合律の破綻とMassey積との類似を考察する. さらに, 3次元多様体の基本群の情報を, ホモロジー環の二次的な対象として取り出す新しい手法を研究した.

(3) グラフ多様体の同境界における

Neumann-Siebenmann 不変量の振る舞い
グラフ・ホモロジー球面に対してRochlin 不変量の整数持ち上げを与えるNeumann-Siebenmann 不変量は, 古田幹雄氏, 上正明氏との共同研究, 並びにN.Savelievの研究によって, w -不変量と一致し, 従ってホモロジー同境界不変性を持つことがわかる. そこで, 一般のグラフ多様体(鉛管多様体)に対してNeumann-Siebenmann 不変量と w -不変量との等価性を示し, グラフ多様体の同境界における振る舞いを考察することができる. また, V. Efremov, N. Mitskievich, A. Magdaleno, R. Bautista は位相的重力理論の一つであるBF理論の類推を鉛管 V 多様体に適用し, その位相と真空結合定数の関係を考察している. そこでグラフ多様体の同境界に関するBF-位相的重力理論の振る舞いを考察し, その真空結合定数とNeumann-Siebenmann 不変量, w -不変量との関係を説明できることが期待される.

4. 研究成果

(1) 2008年度の研究成果

w -不変量と交叉積を用いた3次元多様体の同境界の構造の解析を行った.

w -不変量と Bounding genus の関係
10/8-不等式の V -多様体版を用いた bounding genus の w -不変量による下からの評価, およびグラフ多様体に対して w -不変量と等価である Neumann-Siebenmann 不変量の Brieskorn ホモロジー球面に関する結果を用いることにより, Brieskorn ホモロジー球面の幾つかの無限系列に対する bounding genus を決定した. これにより, ホモロジー同境界群 Θ^H における3次元ホモロジー球面の間の距離に関して具体的に議論を進めることが可能になった.

ホモロジー同境界群と同境界圏の関係

3次元多様体 M の間の同境界 $(W; M, M')$ が誘導する準同型 $H(M) \rightarrow H(W) \rightarrow H(M')$ を抽象化することにより、次数付き可換環 H とその間の代数的射 $H \rightarrow L \rightarrow H'$ に関する圏 L_3 を構成し、さらに3次元多様体の同境界圏 C_3 から代数的圏 L_3 への関手 $\Phi: C_3 \rightarrow L_3$ を構成した。特に、グラフ多様体のホモロジー環の射 L から次数付き多元環 A_* を構成し、その非結合性が同境界の存在の障害を与えることを証明した。また、 A_* の4重積の構造、および M, M' の w -不変量の値を用いることにより、代数的な射 $H(M) \rightarrow L \rightarrow H(M')$ を実現する同境界 $(W; M, M')$ が存在するための必要条件を与えた。

グラフ多様体の同境界圏における Neumann-Siebenmann 不変量の振る舞いの解析

、の結果を踏まえ、一般の3次元多様体 M, M' に対して、そのホモロジー環の間の代数的な射 $H(M) \rightarrow L \rightarrow H(M')$ を用いることにより、bounding genus $|M|$ の一般化として Φ -bounding genus $|M, M'|_L$ を導入し、特に M, M' がグラフ多様体の場合に、 Φ -bounding genus に対して、Neumann-Siebenmann 不変量と次数付き多元環 A_* の4重積による下からの評価を得た。

(2) 2009年度の研究成果

符号数不足指数型不変量の相互法則の組織的研究という観点から研究を行った。

Fourier-Dedekind 和の相互法則のトーラスの表現環への一般化、服部晶夫氏の V -楕円種数の剛性定理を用いた相互法則の一般化、円周 V -作用を持つスピン V -多様体の Dirac 作用素の指数の消滅 $\text{ind}_V D = 0$ を用いることにより、Seifert ホモロジー球面の w -不変量に関する splicing 公式を導出した。この手法は、局所線形であるが滑らかにできない作用の構成に応用することができる。

12次元の重力異常項相殺公式を用いた 11

次元レンズ空間の符号数不足指数型不変量の構成の $8k+3$ 次元への一般化

(a) 上記の非結合代数 A_* の構成の機構を分析し、相対ホモロジー類同士の非結合的な交叉積 $H_*(X, M) \times H_*(X, M) \rightarrow H_*(X) / \text{Im} i_*$ を定式化した。これにより、(b) Φ -bounding genus $|M, M'|_L$ を3次元多様体の同境界圏上の劣加法的関数として精密化し、さらに、(c) 3次元多様体の同境界圏から次数付き可換環の圏への関手 Φ を $8k+3$ 次元多様体の同境界圏 C_{8k+3} へと一般化することにより、Efremov 等による BF 位相的重力理論との関係や K.Liu による奇跡的相殺公式を用いた $8k+3$ 次元多様体の符号数不足指数型不変量 $\delta_L(M, X)$ を考察する枠組みを確立した。

(3) 2010年度の研究成果

符号数不足指数型不変量の同境界圏における挙動の解析に取り組み、以下の結果を得た。

Φ -bounding genus の定式化

3次元多様体の同境界圏 C_3 から次数付き可換環の圏 L_3 への関手 Φ の Φ -bounding genus の定式化において、(a) 境界付き4次元 V 多様体 X 上の相対輪体の形式的な交叉積および非結合代数 A_* の導入、(b) 3次元多様体上の2次元輪体の組とそれらの交叉の偶奇性に関する境界条件の設定を行い、(c) 同境界の合成 (W, W') $W \rightarrow W'$ に関する広義の劣加法性、(d) Φ -bounding genus $|M, M'|_L$ の古田-亀谷-不等式の V 多様体版を用いた w -不変量による一般化された下界公式を導出した。

ホモロジー同境界圏への制限

上記の枠組みをホモロジー同境界圏 C_3^H および代数的な部分圏 L_3^H に関手 $\Phi: C_3^H \rightarrow L_3^H$ に関する Φ -bounding genus のホモロジー同境界不変性を証明した。即ち、 (W, M', M'') をホモロジー同境界であるとしたとき、等式 $|M, M'|_L = |M, M''|_L$ が成り立つことを証明した。これにより、ホモロジー同境界が誘導する

基本群のべき零商の同型との対応，形式的交叉積と Massay 積との類似性，および非結合代数 A_* の構造を調べる手法が得られるものと期待される．

Φ -bounding genus の高次元化

上記の関手 Φ ,および非結合代数 A_* の構成の一般次元への拡張 $\Phi: C_n \rightarrow L_n$ を行った．これにより Φ -bounding genus の高次元化，並びに $8k+3$ 次元の符号数不足指数型不変量 $\delta_L(M, X)$ との関係が考察できるものと期待される．

場の方程式の族の有限次元近似と枠付き同境界類不変量の構成においては，上記の一連の考察を踏まえ， w -不変量のホモロジー同境界不変性の機構を詳細に考察することにより，古田幹雄氏による非線形 Fredholm 理論の Pontrjagin-Thom 構成の一般化の枠組みを用いて， Φ -bounding genus を深化させ，これを理解することが今後の課題である．

5．主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計6件)

Y. Fukumoto, *w-Invariants and the Fintushel–Stern Invariants for Plumbed Homology 3-Spheres*, *Experimental Mathematics*, 20(1) (2011), 1–14. (査読有り)

Y. Fukumoto, *Bounding Genus and the Spin Cobordism Category of 3-manifolds*, INTERNATIONAL CONGRESS OF MATHEMATICIANS Hyderabad 2010 ABSTRACTS Short Communications, Hindustan Book Agency, (2010) 159-160. (査読有り)

Y. Fukumoto, *The bounding genera and w-invariants*, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 137 (2009) 1509-1517. (査読有り)

Y. Fukumoto, *Cobordism category of plumbed 3-manifolds and intersection product structures*, *Journal of Homotopy and Related Structures*, Vol.4(2009), No. 1, 39-68. (査読有り)

福本善洋, *Bounding genus と w -不変量*, 日本数学会 2008 年度年会トポロジー分科会講演アブストラクト, 28-29. (査読なし)

福本善洋, *Bounding genus と 3次元多様体の同境界圏*, 2009 日本数学会秋期総合分科会トポロジー分科会講演アブストラクト, 86-87. (査読なし)

[学会発表](計4件)

Y. Fukumoto, *Bounding Genus and the Spin Cobordism Category of 3-manifolds*, INTERNATIONAL CONGRESS OF MATHEMATICIANS Hyderabad 2010, 22 Aug, Hyderabad International Convention Centre, Hyderabad, India.

福本善洋, *Bounding genus と 3次元多様体の同境界圏*, 2009 日本数学会秋期総合分科会, 2009 年 9 月 25 日, 大阪大学豊中キャンパス (大阪府)

福本善洋, *多様体の同境界圏と交叉積構造について*, 「代数, 論理, 幾何と情報科学研究集会 (ALGI20)」, 2009 年 9 月 14 日, 鳥取環境大学 (鳥取県)

福本善洋, *Bounding genus と w -不変量*, 日本数学会 2008 年度年会トポロジー分科会, 2008 年 3 月 23 日, 近畿大学本部キャンパス (大阪府)

6．研究組織

(1)研究代表者

福本 善洋 (FUKUMOTO YOSHIHIRO)
立命館大学・理工学部・准教授
研究者番号：90341073