

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成24年 4月 26日現在

機関番号：32665

研究種目：若手研究（B）

研究期間：2008～2011

課題番号：20740067

研究課題名（和文） 量子情報科学におけるエントロピー及び情報量に関する基礎研究

研究課題名（英文） Fundamental study on entropy and information in quantum information science

研究代表者

古市 茂 (FURUICHI SHIGERU)

日本大学・文理学部・准教授

研究者番号：50299327

研究成果の概要（和文）：量子情報科学における基本的な情報量やエントロピーに関する数学的な基礎研究を行い、幾つかの結果を得た。主なものとしては、Wigner-Yanase skew information を用いたシュレーディンガー型の不確定性関係の導出や行列トレース不等式を応用した Tsallis 相対エントロピーの下界の導出などである。

研究成果の概要（英文）：I studied the mathematical and fundamental studies for entropies and informations in quantum information theory, and then obtained several important results. For example, I established the Schrodinger type uncertainty relation by using Wigner-Yanase skew information and a lower bound for the Tsallis relative entropy by applying the matrix trace inequality.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合計
2008年度	1,000,000	300,000	1,300,000
2009年度	700,000	210,000	910,000
2010年度	800,000	240,000	1,040,000
2011年度	700,000	210,000	910,000
年度			
総計	3,200,000	960,000	4,160,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学，数学一般(含確率論・統計数学)

キーワード：量子情報理論，量子エントロピー，一般化エントロピー，Skew information，トレース不等式，情報幾何，不確定性関係

1. 研究開始当初の背景

量子系のエントロピーは von Neumann エントロピーで定義されるが、それを一般化した Tsallis エントロピーについて、これまでに、私自身、盛んに研究してきた。特に Tsallis 相対エントロピーの性質や一意性定理の証明などは大きな結果であった。これによって、Tsallis エントロピーの量子情報理論における役割について研究する意義が生じたと言

っても過言ではない。Tsallis エントロピーは非加法性という特徴を持ち、von Neumann エントロピーの一般化となっているためその数学的構造に着目し、明らかにすべき点はまだ多く残っていた。

また、推定理論におけるクラメル・ラオの不等式は有名であり、Fisher 情報量の下界が分散の逆数で抑えられることを示しており、等号は正規分布のときに成り立つこと

が知られている。上記の量子情報理論の背景において述べた Tsallis エントロピーの最大化原理から導かれる確率分布である Tsallis 分布は正規分布の一般化であり、非加法的構造におけるクラメル・ラオの不等式の証明などが考えられるが未だに解決されてはいなかった。

さらに、Skew information を用いた不確定性関係については、ハイゼンベルク型の不等式は示されていたが、シュレーディンガー型のそれは未導出であった。

2. 研究の目的

本研究課題の目的は、情報理論及び情報幾何学における根本的な定理に関して、量子系及び非加法系という数学的な構造の下で証明を与えそれらの情報科学への応用を研究することであった。具体的には以下に列挙する通りであった。

(1) Tsallis エントロピーに関する情報源符号化定理の証明を行う。古典系及び量子系において Tsallis エントロピーの一意性定理が証明されたので、次のステップとして、符号化定理の証明に取り掛かる。これにより、Tsallis エントロピーを圧縮限界とする符号の存在が明らかになる。

(2) Tsallis 相互情報量に関する通信路符号化定理の証明を行う。上記の(i)に引き続き、通信チャンネルが雑音を持つ場合の符号化定理の証明を行う。

(3) 上記の(1)及び(2)の結果を量子系において証明する。

(4) 非加法系における Fisher 情報量を導入し、クラメル・ラオの不等式を証明する。さらに、等号が Tsallis 分布のときかつその時に限ることを示す。

(5) Fisher 情報量による中心極限定理の証明を考える。Fisher 情報量と Skew information の関係を示す。その際に、Skew information の性質について調べる。

(6) 量子系の情報量は作用素に対して定義されており、情報理論や情報幾何学における重要な定理は不等式で示されることが多いので、関連する数理としてトレース不等式や、さらには数学的研究対象として作用素不等式を導く。

(7) 符号化定理は存在定理であるので、符号の存在が示されたならば、具体的な符号の構成を行う。非加法系の符号化定理はフラクタルやカオスとの関連があると推測しているので、それらとの関係を明らかにする。特に、Tsallis エントロピーの経数の値の意味を明らかにすることが大きな目標である。同時に、最終目標として、Tsallis エントロピーの意味を明らかにすることが挙げられる。

(8) 特に、応用として、量子系の Tsallis エントロピーをエンタングルメント（量子相関）の度合いを測る尺度として活用し、二準

位系の物理系（例えば Jaynes-Cummings モデル）

の時間発展とともにエンタングルメントがどのように変化するかを調べる。

3. 研究の方法

主に独自のアイデアで研究目的の遂行を行う。その際に専門書や最新の文献調査を行いながら実施していく。これと並行して重要な事は、国内外の当該分野のシンポジウムや国際会議に出席することである。特に自身の研究成果をその都度、発表することによって、国内外の専門家の方々との議論や情報交換が出来、研究活動が活発化し発展することが期待できたとし実際その期待通りの結果が得られた。

4. 研究成果

非加法系 (Tsallis 統計) の下で、Fisher 情報量を定義しクラメル・ラオの不等式を証明した。この論文の中では一般化期待値の取り方として2通りの場合について考察している。この結果により確率論における基本定理である中心極限定理の一般化の証明が Fisher 情報量を用いてできる可能性が出てきた。これについては今後の課題となっている。同時に Tsallis エントロピー最大化原理についてもラグランジュ未定係数法を用いずに、Tsallis 相対エントロピーを用いて証明することに成功した。これは古典系におけるものであるが、量子系の Tsallis エントロピーや Skew information に関する成果も得られた。特に不確定性関係に関する成果をえた。これとは別に二経数拡張された相対エントロピーの公理的特徴付けをおこなった。

また自身で予想した行列トレースの解決、さらにはその応用として Tsallis 相対エントロピーの下界の導出に成功したからである。また、2010年に自身の結果として出版した論文の更なる発展として、Wigner-Yanase skew information を用いたシュレーディンガー型の不確定性関係の一般化の問題について解決した。すなわち、Wigner-Yanase-Dyson skew information 及び Metric adjusted skew information を用いた不確定性関係を導いた。

さらに、数学的な成果として Young の不等式の改良や逆不等式などの成果があった。Belmega-Lasaulce-Debbah の行列トレース不等式を改良した結果もある。そのほか、行列解析の応用としてのランキングの問題や一般化されたダイバージェンスに関する成果もあった。

本研究課題中に得られた結果について、いくつかのものが海外の研究者に引用され、さらなる研究論文が出版されていることも報告しておく。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 14 件)

【査読あり】

1. N. Minculeten and S. Furuichi, Several applications of Cartwright-Field's inequality, International Journal of pure and applied mathematics., Vol. 71, No. 1 (2011), pp. 19-30. <http://ijpam.eu/contents/2011-71-1/2/index.html>

2. S. Furuichi, and N. Minculete, Alternative reverse inequalities for Young's inequality, Journal of Mathematical inequalities, Vol. 5(2011), pp. 595-600. <http://files.ele-math.com/article/s/jmi-05-51.pdf>

3. S. Furuichi, Characterizations of generalized entropy functions by functional equations, Advances in Mathematical Physics, Vol. 2011 (2011), Article ID 126108, 12 pages. DOI: [10.1155/2011/126108](https://doi.org/10.1155/2011/126108)

4. S. Furuichi, Inequalities for Tsallis relative entropy and generalized skew information, Linear and Multilinear algebra (Special issue on Quantum information science and Numerical ranges), Vol. 59(2011), pp. 1143-1158. DOI: [10.1080/03081087.2011.574624](https://doi.org/10.1080/03081087.2011.574624)

5. S. Furuichi and M. Lin, Refinements of the trace inequality of Belmega, Lasaulce and Debbah, Australian Journal of Mathematical Analysis and Applications, Vol. 7(2011), Art. 2, pp. 1-4. <http://ajmaa.org/cgi-bin/paper.pl?string=v7n2/V7I2P23.tex>

6. S. Furuichi and H. Hino, Mathematical analyses of 2010 FIFA world cup, Applied Mathematics and Information Science, Vol. 5, No. 2(2011), pp. 205-219. <http://naturalspublishing.com/Article.asp?ArtcID=107>

7. S. Furuichi, On refined Young inequalities and reverse inequalities, Journal of Mathematical inequalities, Vol. 5(2011), pp. 21-31. <http://files.ele-math.com/articles/jmi-05-03.pdf>

8. S. Furuichi, An axiomatic characterization of a two-parameter extended relative entropy, Journal of Mathematical Physics, Vol. 51(2010), 123302-1 ~ 123302-10. DOI: [10.1063/1.3525917](https://doi.org/10.1063/1.3525917)

9. S. Furuichi, Schrödinger uncertainty relation with Wigner-Yanase skew information, Phys. Rev. A, Vol. 82(2010), 034101 (3pages) . DOI: [10.1103/PhysRevA.82.034101](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.82.034101)

10. S. Furuichi and M. Lin, A matrix trace inequality and its application, Linear Algebra and its Applications , Vol. 433(2010), pp. 1324-1328. DOI: [10.1016/j.laa.2010.05.011](https://doi.org/10.1016/j.laa.2010.05.011)

11. S. Furuichi, K. Yanagi and K. Kuriyama, Trace inequalities on a generalized Wigner-Yanase skew information, Journal of Mathematical Analysis and Applications, Vol. 356(2009), pp. 179-185. DOI: [10.1016/j.jmaa.2009.02.043](https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2009.02.043)

12. S. Furuichi, K. Kuriyama and K. Yanagi, Note on matrix trace inequalities, Linear Algebra and its Applications , Vol. 430(2009), pp. 2271-2276. DOI: [10.1016/j.laa.2008.12.003](https://doi.org/10.1016/j.laa.2008.12.003)

13. S. Furuichi, On the maximum entropy principle and the minimization of the Fisher information in Tsallis statistics, Journal of Mathematical Physics, Vol. 50(2009), 013303-1 ~ 013303-12. DOI: [10.1063/1.3063640](https://doi.org/10.1063/1.3063640)

14. S. Furuichi, Matrix trace inequalities on Tsallis entropies, Journal of inequalities in pure and applied mathematics, Vol. 9(2008), Issue 1, Article 1, 7pp. <http://www.emis.de/journals/JIPAM/article935.html?sid=935>

[学会発表] (計 34 件)

1. S. Furuichi, A matrix trace inequality and its applications to entropy theory, The 17th International Linear Algebra Society Conference, Technische Universität Braunschweig, Braunschweig, Germany, August 22-26, 2011.

2. S. Furuichi, Refinements of Young inequality and two reverse inequalities for refined Young inequality, the 22nd International Workshop on Operator Theory and its Applications (IWOTA 2011), Universidad de Sevilla, July, 3-9, 2011.

3. S. Furuichi, Skew information, uncertainty relation and trace inequality, International conference QBIC 2011, Tokyo University of Science, Canal Hall Noda Campus, Chiba, Japan, March 7-14, 2011.

4. S. Furuichi, On trace inequalities related to skew informations and generalized relative entropies, Information Geometry and its Applications III, Leipzig, Germany, August 2-6, 2010. (invited lecture).

5.S.Furuichi, A refined Young inequality and related results, The 16th International Linear Algebra Society Conference, Pisa, Italy, June, 21-25, 2010.

6.S.Furuichi, A variational expression for generalized relative entropy, The Second Najman Conference on Spectral Problems for Operators and Matrices, Dubrovnik, Croatia, May 11-16, 2009.

7.S.Furuichi, K.Kuriyama and K.Yanagi, On trace inequalities for products of matrices, 15th International Linear Algebra Society Conference, Cancun, Mexico, 2008.06.16~06.20.

8.S.Furuichi, Matrix trace inequalities on a generalized Wigner-Yanase skew information, International Workshop on Operator Theory and Its Applications(IWOTA2008), College of William and Mary, Virginia, USA, (2008.07.22~2008.07.26).

6. 研究組織

(1) 研究代表者

古市 茂 (FURUICHI SHIGERU)

日本大学・文理学部・准教授

研究者番号 : 50299327

(2) 研究分担者
なし

(3) 連携研究者
なし