

機関番号：11301

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2008～2010

課題番号：20740118

研究課題名(和文) 相対論的連星系の運動方程式の研究

研究課題名(英文) Study on equations of motion for relativistic compact binaries

研究代表者

伊藤 洋介 (ITO YOUSUKE)

東北大学・大学院理学研究科・助教

研究者番号：60443983

研究成果の概要(和文)：

中性子星連星系などの相対論的連星系からの重力波の直接観測には、連星の運動方程式を高精度で求めておく必要がある。本研究では、ポスト・ニュートン近似法を用いて、第1原理から導出された方程式としては世界最高精度である3.5次精度の運動方程式の導出に成功した。また、時空に特異線が存在しないという要請を課すことにより、アインシュタイン方程式と無矛盾な電磁場が存在する時空における点電荷の運動方程式を導出した。

研究成果の概要(英文)：

Highly accurate equations of motion for relativistic compact binaries play an essential role in direct detection of gravitational waves from relativistic compact binaries such as neutron star binaries. In this research project, using the post-Newtonian approximation, we have derived equations of motion for relativistic compact binaries through the 3.5 order accuracy in the Einstein's general relativity. These are the ones of the most accurate equations of motion ever derived using the first principle. We have also derived equations of motion for a point charge in an arbitrary electromagnetic field that is consistent with the Einstein equations by imposing that there be no line-singularity in the space-time.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2008年度	1,700,000	510,000	2,210,000
2009年度	200,000	60,000	260,000
2010年度	800,000	240,000	1,040,000
年度			
年度			
総計	2,700,000	810,000	3,510,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：物理学・素粒子・原子核・宇宙線・宇宙物理

キーワード：宇宙物理・一般相対性理論・運動方程式・重力波・相対論的連星系

## 1. 研究開始当初の背景

20世紀の天文学は電波・X線望遠鏡などの新たな観測手段を獲得するにつれ爆発的に発展してきた。21世紀前半に開かれる天文学として、重力波によるものがある。アインシュタインの一般相対論によって予言された時空間を伝搬する重力場変動である重力波は、直接観測が現在もなされていない。日本

を含む世界各国が重力波検出器を建設しており、本報告執筆時から数年以内の直接検出は現実味を帯びている。

現在建設中・稼働中の重力波検出器にとって、もっとも有望な重力波発生天体現象は、中性子星連星など、相対論的な連星系の合体直前の準公転運動である。このような合体現象は、連星系がその公転軌道運動によって重

力波を放出し、軌道角運動量を失って軌道半径を減少させていくことで起こる。

さて、合体直前にある相対論的連星系からの重力波を効率的に検出する方法としてもっとも良く使われている方法はマッチドフィルター法である。この方法では、まず、重力波検出器の出力と理論的に予測される波形との相関をとる。ここで波形予測は星の質量など、いくつかのパラメータに依存している。そこで、相関が最大になるようなパラメータを探し、相関の値が事前に設定した閾値を超えるかどうかを問う。超えたならば、そのようなパラメータを持っている連星系からの重力波を検出したと考えるのである。ここで分かるように波形予測が間違っていると正しい重力波は検出されない。重力波波形予測が、相対論的連星系からの重力波の直接検出に重要なゆえんである。

さて、重力波波形の予測には理論的には何が必要なのだろうか。一般相対論によれば、重力波波形は主に連星系の（質量）四重極モーメント（および高次の多重極モーメント）の時間変化に依存することが知られている。したがって、重力波波形を精密に予測するためには系の時間進化、すなわち、系の動力学を支配する運動方程式が必須の理論的道具であることがわかる。相対論的連星系の運動方程式は、中性子星連星の合体といった、いまだ謎のベールに包まれた、一般相対論によって記述されるような極限的天体現象を、重力波天文学を通して解明するための本質的な道具と言って良い。

このように重要な運動方程式の導出方法として、当時、また現在までもっとも実用的な方法はポスト・ニュートン近似法である。この方法では、連星系の公転運動は光速に比べて十分遅く（光速の30パーセント以下程度）、公転運動を支配する重力場は十分弱いと仮定する。そして、最低次をニュートンの運動方程式とポアソンの重力場の方程式とすることによって、それらに対する一般相対論的補正を求めていく。ここで展開パラメータは連星の典型的な速度を光速で割ったものになる。ポスト・ニュートン近似は解析計算が可能という意味で便利なのだが、合体直前の中性子星連星の状態を記述するためには高次の補正が必要であることが知られている。

以上のような状況にあって、実際、研究開始当時までに、筆者をはじめとする世界各国の研究者が3次摂動の運動方程式を導出していたのだが、いくつか問題があった。まず実用的には、3次摂動で十分なのか、摂動の誤差はどれほどなのか、などである。3次摂動で十分かどうかについては、質量比が大きい系では不十分であろうという結論が得られており、そのような系への適用においては、

より高次の方程式もしくは新しい近似による運動方程式の、重力波検出器完成前の導出は急務であった。後者の誤差の問題については、ポスト・ニュートン展開がおそらく漸近展開であることからその評価が難しいが、3次以上の補正項を実際に導出することによって評価する必要がある。以上の実的な点に加えて、学術的には、運動方程式の導出における途中計算において発散が生じること、理論の範囲内で決定できない不定定数の存在すること、などが我々以外のグループから報告されていた。これは当該グループが星を記述するために、Diracのデルタ関数を使用していたことに起因する問題である。一般相対論は非線形理論なので、Diracデルタ関数の使用は発散積分を生じる。その正則化のためにアダマール正則化などの方法が使用されていたが、そのような正則化は重力場および運動方程式を一意に決定できず、彼らの理論の枠内で決定できない定数（不定定数）が生じていたのだ。このことから、当時3次摂動および高次摂動の計算の妥当性が問われていた。この問題は、世界に4つあるグループのうち、我々以外の全てが抱えていたものである。後に彼らは、場の量子論などで使用される次元正則化法により不定定数の存在しない運動方程式の導出に成功したが、そのような正則化が正しい答えを（3次および高次補正で）出すのかどうか自明ではない。以上の問題に加えてまた、高次摂動方程式では数十万項にも及ぶ数式の積分や代数計算を要し、計算方法の確立や結果の正否の検証も重要な問題であった。このような研究遂行上の問題は、地味ながら重要である。

筆者のグループは本研究課題開始以前からこの問題に精通しており、実際、3次精度の運動方程式を世界の他グループとほぼ同時に発表していた。さらに、我々の方法では上述の発散や不定定数の問題が存在せず、信頼度が高かった。重力波天文学のスタートのために必要な道具は信頼できるものでなくてはならず、我々の方法によってより高次の運動方程式を導出し、研究することを必要と感じていた。

## 2. 研究の目的

発散や不定定数問題の生じない質点近似とポスト・ニュートン法を用いて3.5次および4次精度の運動方程式を導出する。発散が生じない方法を用いることによって導出した運動方程式の信頼性を高める。問題が生じてポスト・ニュートン近似を使用できない場合にそなえ、他の運動方程式の導出方法についても研究をおこない、運動方程式の新しい導出方法の開発を目指す。また、輻射の反作用に関係する自己力の生成過程を解析する。

## 3. 研究の方法

合体直前の準公転運動期にある連星系で

は、軌道公転半径が星の半径よりも十分大きい  
ため、星は質点プラス低次の多重極モー  
メントで記述できる。そこで、2質点に対する  
運動方程式を、ポスト・ニュートン近似法を  
使って求めていくことにする。ここで質点近  
似として、strong field point particle 法を用  
いる。この方法は 1987 年に二間瀬によっ  
て提唱されたものであり、計算過程で発散を  
生じない質点近似として知られているもの  
である。発散が生じないため、その正則化を  
する必要が無く、これがゆえに我々の研究  
では 3 次補正項で不定定数を生じることが  
なかった。導出した運動方程式が正しいか  
否かのチェックには、運動方程式が摂動論  
的にローレンツ不変性を満たすことを確か  
めることをおこなう。

中間計算で要する数百万項におよぶ数式  
の積分および代数計算には Mathematica  
を主に使用し、独立に Maple を用いたプロ  
グラムで結果をチェックする。このような計  
算には大容量のメモリが必要であるため、  
本研究初年度に代数計算に適した計算機を  
購入する。

ポスト・ニュートン法を用いた運動方程式  
の導出において、重力場の計算で問題が起  
きた場合には、アイルランドダブリン大学  
の P. A. Hogan 准教授との共同研究です  
すめている方法を用いて同等精度の運動  
方程式の導出を目指す。この Hogan の方  
法では、まずアインシュタイン方程式を  
満たす任意の外場と小さな荷電ブラック  
ホールを別個に考える。それぞれは別個  
にアインシュタイン方程式を満たす。こ  
こで、荷電ブラックホールを外場時空に  
入れると、そのままでは外場計量とブラ  
ックホール計量の単純和はアインシュ  
タイン方程式を満たさない。そこで、相  
互作用の自由度を考え、二つの計量の  
単純和と相互作用場による計量の和が  
アインシュタイン方程式を満たすよう  
に摂動的に、相互作用場についてアイン  
シュタイン方程式を解く。このとき一般  
にはブラックホールから特異線が無  
限遠に向かって延びる解が得られるが、  
ここで特異線が存在しないようにという  
条件を課すことができる。そして、この  
条件を課すことで運動方程式が得られ  
る。この方法では、直感的には、特異  
線によって外部から支えられていない  
ブラックホールは（外場を除いて）孤立  
系と考えられ、アインシュタイン方  
程式を満たすためには、外場および  
外場と純粹自己場の相互作用によって  
派生した相互作用場によって作られる  
時空中を運動せざるを得なくなるとい  
うことを利用して運動方程式を求め  
ている。このような方法はほとんど試  
みられていない、まったくと言って  
良いほど新しい運動方程式の導出  
方法である。なおこの方法では、連  
星をなす 2 つの星の質量が極端に  
異なる場合について

適用できる運動方程式を導出している。「1.  
研究開始当初の背景」で述べたように、  
このような状況は実用上の価値がある  
と考えられる。

#### 4. 研究成果

本研究プロジェクト開始以前から使用  
していた方法によって 3.5 次精度の運動  
方程式の導出に成功した。この方法では、  
Dirac のデルタ関数を一切用いておらず、  
計算の過程で数学的発散や、発散の数学  
的正則化にともなう不定定数が生じな  
い。計算のすべての過程で筆者が書い  
た Mathematica のプログラムを使用し、  
適宜 Maple で書いたプログラムによ  
って計算をチェックした。購入した計  
算機は、メモリ容量、速度の点で事前の  
期待通りに使用できた。結果として得  
られた運動方程式は摂動論的にローレン  
ツ不変性を満たすことを確かめた。3.5  
次精度補正項は以前から知られていた  
が、本研究の結果と一致した。本研究  
の新しい点として、初めてエネルギーの  
局所保存則という第 1 原理から導出した  
こと、Dirac デルタ関数やその使用に  
よる正則化を使用しない、よりロバス  
トな導出方法を用いたことが挙げられ  
る。なお、3.5 次ポスト・ニュートン  
運動方程式は、大域的エネルギー保存  
則を用いた方法による導出で得られた  
ものを除いて、現在世界最高精度の方  
程式である。（大域的エネルギー保存則  
とは、連星系の輻射反作用によるエネ  
ルギー損失は無限遠での重力波エネ  
ルギー流出量に等しいとする保存則の  
こと。この方法で 4.5 次補正項が求  
まっているが、4 次補正項は求まらな  
い。）参考として、以下の図 1, 2 は 3  
次補正項まで考慮した場合の、時間の  
関数としての重力波振幅と 3.5 次補正  
項まで考慮したそれとの比較を示す。  
図 1 は準公転運動期の初期で、鎖線  
で示された 3.5 次まで正しい波形は実  
線で示された 3 次補正までの波形とほ  
んど変わらない。これは準公転運動期  
初期には連星の公転軌道運動速度が  
十分ゆっくりであり、比較的 low 次  
の補正項で十分系を記述できるから  
である。

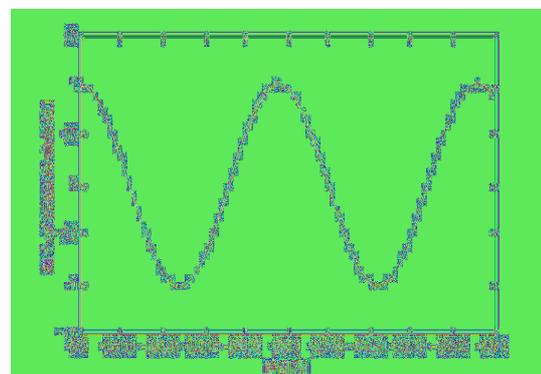


図 1 : 準公転運動期初期の重力波波形

一方図 2 は準公転運動後期の重力波波形を示す。実線と鎖線のずれが目立ち、3.5 次補正項を考慮に入れる重要性がわかる。

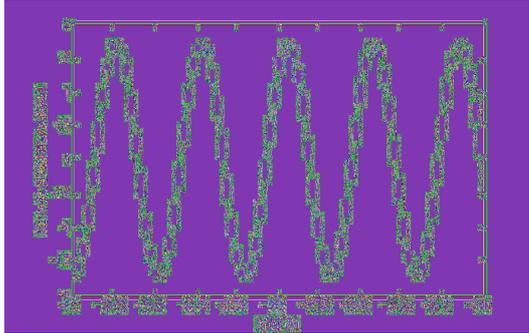


図 2 : 準公転運動期後期の重力波波形

4 次精度のポスト・ニュートン運動方程式については、3 次精度の重力場の導出がうまくいかず、断念した。具体的問題として、アインシュタイン方程式を解く上で非局所的な源項を持つポアソン方程式を解く必要があるのだが、3 次以上の高次補正では方程式に十分な空間的対称性が存在せず、アインシュタイン方程式を解く上で必要なポアソン方程式の特解を求めることができなかつた点が多い。なお本報告執筆時点で、世界で 4 次精度のポスト・ニュートン運動方程式の導出に成功したグループは無い。

4 次精度の運動方程式を導出するための代替策として、Hogan 氏の提唱する運動方程式の導出法を採用し、質量比が大きい場合に適用できる、アインシュタイン方程式と無矛盾な電磁場が存在する場合の運動方程式を導出した。この方程式は 1998 年に日本の蓑らによって形式的に導出された tail 項を計量によって表現した点で、応用という意味で新しくかつ有用である。また「3. 研究の方法」で述べた通り、時空に特異線が存在しないことを条件として課すことにより運動方程式を導出するなど、今までほとんど考えられてこなかったアイデアを元にしており、そのような方法で運動方程式が導出できることを示したことは、今後の発展という意味で、学問的にも面白い結果である。なお蓑らの結果によれば、この tail 項が非線形理論に特有の自己力およびこれに含まれる輻射の反作用と関係している。非常に面白い結果と考えているのだが、一方で、既存の結果との関係が今のところ不明な点がある。一般相対論においてはゲージ自由度が存在するため、その影響とも考えられる。また重力場を生じるような強い電磁場中の運動方程式を導出した結果は今回の我々のそれのみなので、既存の結果との比較が難しい点もあると思われる。

る。既存の結果との関係について調査中である。現在得られた運動方程式について、tail 項がどのように生じたのか、また、どのように輻射の反作用を与えるのかについて研究中である。また、電磁場の存在しない場合について運動方程式の導出を試みている。

#### 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 5 件)

- ① 伊藤洋介、矢幡和浩、高田昌広、Dipole anisotropy of galaxy distribution: Does the CMB rest-frame exist in the local universe?", Physical Review D、査読有、82 巻、2010、043530-1-20
- ② 伊藤洋介、Tidal Mechanism as an Impossible Cause of the Observed Secular Increase of the Astronomical Unit、Publications of the Astronomical Society of Japan、査読有、61 巻、2009、1373-1374
- ③ 伊藤洋介、Third-and-a-half order post-Newtonian equations of motion for relativistic compact binaries using the strong field point particle limit、Physical Review D、査読有、80 巻、2009、124003-1-17
- ④ 伊藤洋介、二間瀬敏史、服部誠、Method to measure a relative transverse velocity of a source-lens-observer system using gravitational lensing of gravitational waves、Physical Review D、査読有、80 巻、2009、044009-1-10
- ⑤ 二間瀬敏史、P. A. Hogan、伊藤洋介、Equations of Motion in General Relativity of a Small Charged Black Hole、Physical Review D、査読有、78 巻、2008、104014-1-15

[学会発表] (計 4 件)

- ① 伊藤洋介、相対論的連星系の 3.5 次ポスト・ニュートン運動方程式の導出、日本物理学会第 65 回年次大会、2010 年 3 月 23 日、岡山大学、岡山県
- ② 伊藤洋介、二間瀬敏史、服部誠、重力波重力レンズ現象による transverse velocity の測定方法の提案、日本物理学会第 64 回年次大会、2009 年 3 月 30 日、立教大学、東京都
- ③ 伊藤洋介、Brief biased review on Gravitational Wave Astronomy with some examples including our work.、The 1st GCOE international symposium、2009 年 3 月 5 日、東北大

- 学、宮城県
- ④ 伊藤 洋介、矢幡和浩、高田昌広、銀河分布と Cosmic Microwave Background の温度揺らぎの双極子成分、日本天文学会、2008年9月11日、岡山理科大学、岡山県

[その他]  
ホームページ等

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

伊藤 洋介 (ITOH YOUSUKE)  
東北大学・大学院理学研究科・助教  
研究者番号：60443983

### (2) 研究分担者

( )

研究者番号：

### (3) 連携研究者

( )

研究者番号：