

研究種目：若手研究（スタートアップ）

研究期間：2008～2009

課題番号：20840032

研究課題名（和文） フロベニウス写像による直像の安定性と正標数代数幾何

研究課題名（英文） Stability of direct images by Frobenius morphisms and algebraic geometry in positive characteristic

研究代表者

北臺 如法 (KITADAI YUKINORI)

広島大学・工学研究科・特任助教

研究者番号：30511563

研究成果の概要（和文）：正標数の代数多様体上のベクトル束がフロベニウス写像による直像をとることで安定性が保たれるかどうかという問題とそれに関連する問題について研究した。既に得られている曲面の場合の結果で重要な役割を果たした半安定な余接束、あるいは指定回数フロベニウス写像による引き戻しで半安定性が崩れる余接束を持つ多様体を探索し、半安定性とフロベニウス写像との関係をより理解するための計算を進めた。

研究成果の概要（英文）：We studied the problem of whether taking direct images of semistable vector bundles on algebraic varieties in positive characteristic by Frobenius morphisms preserves semistability or not and related problems. Calculations to find concrete examples of algebraic surfaces whose cotangent bundles are semistable or are not semistable by Frobenius pullback several times were proceeded.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合計
2008 年度	1,320,000	396,000	1,716,000
2009 年度	1,200,000	360,000	1,560,000
年度			
年度			
年度			
総計	2,520,000	756,000	3,276,000

研究分野：代数幾何学

科研費の分科・細目：数学・代数学

キーワード：ベクトル束, 安定性, 半安定ベクトル束, 正標数, フロベニウス写像, de Rham 複体, 小平消滅定理

## 1. 研究開始当初の背景

正標数の代数幾何の大きな特徴は、非分離的な射の存在である。正標数の代数閉体上の代数多様体とその上のベクトル束を考えると、多様体の上には絶対フロベニウス写像(以下、フロベニウス写像)という非分離的な射の典型が存在する。フロベニウス写像によるベ

クトル束の引き戻しという操作と安定性の関係は、正標数代数幾何学では基本的な問題として考えられてきた。しかし次のように、フロベニウス写像による直像と安定性の関係は、自然な対象にもかかわらず研究が始まって間もない状態にあった。

(1) フロベニウス写像による直像の安定性そのもの問題

Lange と Pauly は、種数が 2 以上の曲線上の場合に、直線束がフロベニウス写像による直像をとる操作によって常に安定ベクトル束になることを示した。これを動機として、研究代表者は、代数多様体上のベクトル束をフロベニウス写像による直像をとる操作で安定性、または半安定性が保たれるか、崩れるのかという自然な問題に取り組み始めた。

上記の Lange と Pauly の自然な高次元化・高階数化として、半安定な余接束を持つある種の曲面上の直線束の場合、あるいは余接束の直線束ひねりの場合への一般化を隅廣秀康氏と共同で研究し、肯定的に解決した。この、曲面への一般化の過程で、フロベニウス写像によるベクトル束の直像そのものではなく、直像をさらにフロベニウス写像により引き戻す操作を加えて考え、その引き戻しの上に標準的フィルタ付けという自然なフィルタ付けを導入し、それに標準接続という古典的な道具を組み合わせることが我々の証明の鍵となり、重要な役割を果たした。

しかし、曲面の場合の結果のさらなる高次元化・高階数化のためには、この標準的フィルタ付けのさらなる深い解析、特に標準的フィルタ付けの次数成分に現れる切り落とし対称テンソル積 (truncated symmetric tensor product) の安定性、すなわち正標数独特のテンソル積と半安定性の関係の解明といった、正標数における半安定性の深い理解が求められていた。

(2) フロベニウス写像による直像と安定性の現象の正標数の代数幾何学への応用

また、上記の曲面の場合への我々の一般化は、正標数一般型代数曲面の地理の問題、正標数における小平消滅定理の問題、de Rham 複体との関係などにも関係することがわかっており、フロベニウス写像によるベクトル束の直像とベクトル束の安定性という問題を通じたこれらの問題への応用や関係の解明が期待されていた。

## 2. 研究の目的

本研究の目的は、フロベニウス写像による直像の安定性を通じて正標数の代数幾何学における新しい知見を得ることである。具体的には、大きく次の 2 つである。

(1) フロベニウス写像による直像の安定性そのものの理解

正標数の代数多様体上のベクトル束がフロベニウス写像による直像をとることで安定性が保たれるかどうかという自然な問題の

曲線上の直線束の場合にあたる Lange と Pauly の定理を、曲面上の直線束の場合に一般化した過程で現れた、標準的フィルタ付けをさらに解析することで、この結果のさらなる高次元化・高階数化を得ること、より具体的には、標準的フィルタ付けの解析のために、正標数独特のテンソル積と半安定性の関係をもっと深く知ることである。

(2) フロベニウス写像による直像と安定性の現象の正標数の代数幾何学への応用や例を広げること

フロベニウス写像によるベクトル束の直像の安定性の問題を通して、正標数一般型代数曲面の地理の問題、正標数における小平消滅定理の問題、de Rham 複体との関係といった応用へと問題とその理解を広げていくことである。

また、実際に定理の条件として現れた、半安定な余接束を持つ代数曲面、あるいは、指定した回数フロベニウス写像による引き戻しで半安定性が崩れる余接束を持つ代数曲面の具体的な例を探索し、その現象が起こる条件や背後にある性質は何なのかを知ること、正標数代数幾何の深い理解を得ることである。

## 3. 研究の方法

これまでの研究で標準的フィルタ付けの次数部分に現れる切り落とし対称テンソル積と余接束の半安定性の解析が重要であった。そしてその解析の際に、多様体が半安定な余接束を持つという性質が重要な役割を果た

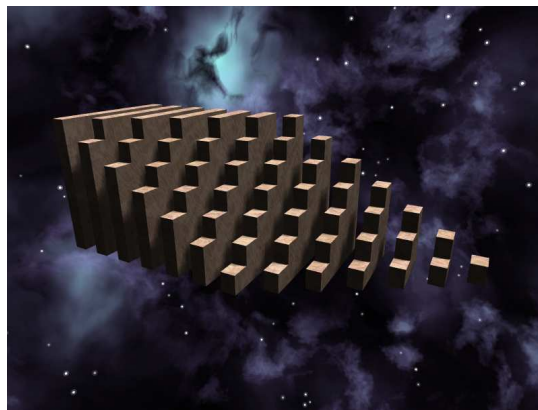


図 1. 曲面の場合の標準的フィルタ付けの模式図。切り落とし対称テンソル積 (truncated symmetric tensor product) の構造が見て取れる。

した。

そこで、半安定な余接束を持つ正標数の代数曲面の具体例を調べるために、半安定な余接束、あるいはそのフロベニウス写像による指定回数の引き戻しで半安定性が崩れる余接束を持つ多様体の例を構成するための具体的な計算を次の方針で行った。

#### (1) 曲面であることを利用した部分束の限定

ベクトル束の安定性を調べる方法の一つは、定義通りの方法、すなわち、そのベクトル束の非自明な部分束すべてについて傾きと呼ばれる量を計算し、それが元のベクトル束の傾きよりも小さいことをチェックするということである。

曲面の余接束は階数 2 であるので、余接束に含まれる非自明な部分束を調べるには、階数 1 のベクトル束、すなわち直線束のみを調べればよい。したがって、余接束に含まれるすべての直線束の傾きを調べるという方法で研究を進めた。

#### (2) ピカール群が具体的にわかっている曲面の選択

その中で、ピカール群がよくわかっている曲面に対して、直線束が余接束あるいはその数回のフロベニウス写像による引き戻しに含まれる条件を、層の貼り合わせを具体的に計算することにより行った。

#### 4. 研究成果

上記の方法のように曲面の余接束やそのフロベニウス写像による引き戻しはいずれも階数が 2 であるので、それに含まれる非自明な部分束をすべて調べるためには直線束のみを調べればよい。そこで、そのベクトル束に含まれる直線束の傾きを調べて定義通りの半安定性のチェックを行うという方針で研究を進めた。そこで、ピカール群がよくわかっている曲面を選択し直線束すべてを考えられるようにした。その曲面に対して、その上の直線束が余接束あるいはその数回のフロベニウス写像による引き戻しに含まれる条件は、ある層の 0 次コホモロジが非自明な元を持つかという条件に翻訳でき、そのコホモロジは、層の貼り合わせを具体的に計算することにより行える。この方針により計算を行ったものの、新しいと呼べる例の構成・発見には遺憾ながら未だに至ってはいない。

したがって、国内外における位置づけやインパクトについては特筆することはまだ存在していない。

しかしながら、今後の展望として、ピカール群のわかりやすい曲面を用いたこの方法の計算は、具体的に計算ができる方法であり、

計算機に乗りやすく大規模計算が可能であり調査の価値のある方法であると思われ、継続調査すべきである。また、この方法により、余接束のみならず、他の特別な階数 2 のベクトル束についても、計算機によってその半安定性が計算できるのではないかという感触を得ており、その一般化に向けての計算代数的アルゴリズムの研究の方向にも発展が見込める。この方向の研究についても今後の課題としたい。

#### 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 0 件)

[学会発表] (計 5 件)

1. 北臺如法, Canonical filtrations and stability of direct images by Frobenius morphisms over surfaces, Informal presentations in the atrium, 2009 年 2 月 9 日 (月) 12:30-13:00, Mathematical Sciences Research Institute (米国バークリー).

2. 北臺如法, 余接束のフロベニウス写像による直像の安定性, 早大理工代数幾何学セミナー, 2008 年 11 月 28 日 (金) 16:45-18:15, 早稲田大学大久保キャンパス 51 号館 18 階 08 室.

3. 北臺如法, Stability of direct images of cotangent bundles by Frobenius morphisms, Algebraic Geometry in positive characteristics and related topics, 2008 年 11 月 7 日 (金) 14:00-15:00, 名古屋大学大学院多元数理科学研究科,

4. 北臺如法, フロベニウス写像による直像の安定性と正標数代数幾何 (1)-(3), 代数幾何学都留ワークショップ 2008, 2008 年 9 月 18 日 (水) 13:00-14:00, 14:20-15:20, 2008 年 9 月 19 日 (水) 9:50-10:50, 都留文科大学

5. 北臺如法, 余接束のフロベニウス写像による直像の安定性, 東北大学代数幾何セミナー, 2008 年 5 月 9 日 (金) 13:30-15:00, 東北大学理学部.

#### 6. 研究組織

(1) 研究代表者

北臺 如法 (KITADAI YUKINORI)

広島大学・大学院工学研究科・特任助教  
研究者番号：30511563

(2)研究分担者  
( )

研究者番号：

(3)連携研究者  
( )

研究者番号：