

令和 5 年 6 月 14 日現在

機関番号：32644

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2020～2022

課題番号：20K03541

研究課題名(和文)代数多様体の射の視点からのヒルベルトスキームの研究

研究課題名(英文) Study on Hilbert schemes from the viewpoint of morphisms of algebraic varieties

研究代表者

那須 弘和 (Nasu, Hirokazu)

東海大学・理学部・教授

研究者番号：30535331

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 1,700,000円

研究成果の概要(和文)：主な研究成果の概要は以下のとおりである：

(1) 非特異Fano三様体上の曲線のヒルベルトスキームに対し、多様体上の楕円曲線を用いて、生成的に被約でない既約成分を持つための新たな十分条件を与えた。(2) 3次元多様体上の曲線の変形障害に関する研究を進展させ、報告者の以前の結果の誤りを修正すると同時に、向井・那須の判定法の新たな一般化を得た。(3) 空間曲線のヒルベルトスキームに関するKleppe-Ellia予想を3-極大族の一般元が2次的正規という条件のもとで証明した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

空間曲線は19世紀末から研究されている代数幾何学における古典的研究対象の一つである。中でも非特異3次元曲面に含まれる曲線は、同曲面の持つ美しい性質(射影平面の6点爆発と同型でE<sub>6</sub>型の対称性をもつ)により詳しく研究されてきた。未解決予想の一つとしてKleppe-Ellia予想がある。本予想は空間曲線のヒルベルトスキームの非被約成分に関する予想として提起されたが、本質的には同スキームの次元に関する予想と捉えることが可能である。解決のためには接空間の次元が大きい場合にスキームの次元を決定するという技術的困難が伴う。この困難を克服するために変形障害の理論を進展させ、障害類の計算技術が向上した。

研究成果の概要(英文)：Our main results are as follows:

(1) We give a sufficient condition for the Hilbert scheme of a smooth Fano threefold to contain a generically non-reduced component in terms of elliptic curves on the threefold. (2) We develop a theory on computing obstructions to deforming curves on a threefold, and correct a mistake in our previous result, as well as obtain a new generalization of a criterion due to Mukai and the author. (3) We prove the Kleppe-Ellia conjecture concerning the Hilbert scheme of space curves, under the assumption that a general member of a 3-maximal family is quadratically normal.

研究分野：代数幾何学

キーワード：ヒルベルトスキーム 変形障害 空間曲線 del Pezzo曲面 エンリケス曲面 エンリケス・ファノ多様体 変形理論

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属します。

## 様式 C—19、F—19—1、Z—19 (共通)

### 1. 研究開始当初の背景

- (1) 固定された射影的代数多様体上の曲線全体の集合には射影スキームの構造が入り **ヒルベルトスキーム (Hilbert scheme)** と呼ばれる. Mumford (1962) は 3次元射影空間  $\mathbb{P}^3$  内の非特異連結曲線のヒルベルトスキーム  $\text{Hilb}^{sc} \mathbb{P}^3$  が **生成的に被約でない (generically non-reduced)** 既約成分を持つことを示し, ヒルベルトスキームの **病理 (pathology)** と位置づけた. 幾何学的に性質の良い対象のモジュライ空間が良い性質を持つであろうという期待を本例は裏切り, 当時の研究者達を驚かせた. 1980年代に入り Gruson-Peskine, Kleppe, Ellia, Fløystad などによって,  $\text{Hilb}^{sc} \mathbb{P}^3$  の場合に Mumford の例の類似が多数構成された. 近年では, 報告者と向井茂氏により, 多くの 3次元単線織多様体上の曲線のヒルベルトスキームに対し, Mumford の例が一般化され (2009), Mumford の例を初めとするヒルベルトスキームの病理に関する理解が深まりつつある.
- (2) 報告者は向井氏との共同研究で得た埋め込み曲線 (embedded curve) の変形障害に関する一連の結果を,  $K3$  曲面上の曲線にも適用できるように一般化し (2017), その結果を応用することでピカル数 1 の任意の **非特異 Fano 三様体** のヒルベルトスキームが生成点において被約でない既約成分を持つことを証明した (2019). また一般化を Enriques 曲面上の曲線にも適用し, **Enriques-Fano 三様体 (EF3)** と呼ばれる特異 Fano 三様体に対しても, Mumford の例の類似が構成された (2019). その研究過程で, EF3 の非特異 Fano 被覆のヒルベルトスキームにも同様の非被約成分が存在することを発見し, **代数多様体の射の視点からヒルベルトスキームの特異性** の原因究明を行うという着想に思い至った.

### 2. 研究の目的

- (1) 種々の変形理論においては **障害類の空間** が定まっている. 代数多様体  $X$  のヒルベルトスキームの場合には部分スキーム  $C \subset X$  の法束  $N_{C/X}$  のコホモロジー群  $H^1(C, N_{C/X})$  である. このコホモロジー群が消滅すれば,  $\text{Hilb } X$  は  $C$  に対応する点  $[C]$  において非特異であるが, そうでない場合に一般論はない.  $H^1(C, N_{C/X}) \neq 0$  のとき, ヒルベルトスキームは一般に大きな接次元をもち, スキームとしての次元を決定することは容易でない. このような場合にも, ヒルベルトスキームの次元を決定し, 同スキームの諸々の具体的性質に関する理解を深めるのが狙いである.
- (2) 代数幾何学の研究の歴史の中で **Fano 多様体** は古くから研究されてきた重要な研究対象の一つである. 中でも非特異 Fano 三様体については Iskovskikh, 藤田, 森, 向井達の仕事により分類が完成しており, これらの多様体上の曲線の変形の研究は興味深い. Fano 多様体上の有理曲線の変形に関しては先行研究が豊富であるが, **種数の大きな曲線の変形についてはまだそれほど研究が進んでいない**. Fano 多様体上の高種数の曲線のヒルベルトスキームの具体的性質を探ることも本研究の目標である.

### 3. 研究の方法

Mumford が与えた非被約既約成分の例を, 他の射影的代数多様体のヒルベルトスキームの場合に一般化もしくは簡易化することにより, 次元や既約 (被約) 性をはじめとするヒルベルトスキームの諸々の具体的性質に関する理解を深める. 研究の背景で述べた Mumford の例の一般化の結果には以下の考え方が共通している:

- 三様体上の **特殊な曲線 (有理曲線, または楕円曲線)** が三様体上の他の曲線の変形 (障害) に **悪影響を及ぼす**.
- その結果パラメータ空間であるヒルベルトスキームに (非被約成分などの) **特異性が生じる**.

研究を進める上で重要な鍵となるのが, 曲線の三様体上での **変形障害** である. [2] では三様体上の曲線の 1 位無限小変形に対し, 2 位変形へのリフトに付随する **第一障害 (primary obstruction)** が零でないための十分条件が与えられた (本報告では **障害性定理** と呼ぶ). その条件を弱めることにより, 障害性定理をさまざまなクラスの三様体に適用することが可能となり, ヒルベルトスキームの

特異性への理解が進むことが期待される (cf. 表 1). Enriques-Fano 三様体のヒルベルトスキームの研究中に得た着想に基づき, 代数多様体の射の視点から曲線の変形障害を調べることも計画した.

TABLE 1. Mumford 型の生成的非被約成分

3-fold $X$	surface $S$	$[C] \in \text{Pic } S$	$E$	
$\mathbb{P}^3$	del Pezzo	$-K_X _S + 2E$	直線	[3]
$Q^3 \subset \mathbb{P}^4$				[2]
del Pezzo			[2, 4]	
$\mathbb{P}^3$ or $V_4 \subset \mathbb{P}^4$	K3	$-2K_X _S + 2E$	楕円曲線	[5]
prime Fano			円錐曲線	[6]
Enriques-Fano			Enriques	$-K_X _S + 2E$

#### 4. 研究成果

(1) 2020 年度の主な研究実績は以下の通りである\*:

- ① 非特異 3 次元 Fano 多様体上の曲線のヒルベルトスキームに対し, 多様体上の楕円曲線を用いて, 生成的に被約でない既約成分を持つための十分条件を与えた.
- ② 3 次元射影多様体上の曲線の 1 位無限小変形の変形障害に関する以前の結果 [5, 定理 3.3] に誤りを発見し, 定理を修正した.

2019 年度までの研究により, 多くの非特異 3 次元 Fano 多様体に対し, その上の非特異連結曲線のヒルベルトスキームが上記のような非被約成分を持つことが知られていた. その証明の中で多様体上の有理曲線とその変形が多様体全体を覆うという事実が鍵となった. 研究成果①により, 有理曲線に限らず, 楕円曲線を用いてもそのような非被約成分の存在を証明できることがわかった. 一方, 向井・那須 (2009) では, 3 次元射影多様体上の曲線の 1 位無限小変形に対し, 2 位変形にリフトしないための十分条件が与えられた. 上記の定理 3.3 ではこの結果の一般化が与えられたが, その主張と証明に誤り (反例も) が発見され, 定理を修正した (結果②). 結果②は修正論文として [8] に採録された. また代数多様体の射の視点からのヒルベルトスキームの研究を開始し, 高次元射影空間に含まれる空間曲線に対し, その射影と曲線の障害性との間の関係について詳しく調べた. 2020 年 10 月には, 伊藤敦氏 (名古屋大) と佐藤拓氏 (福岡大) と共同で, 城崎代数幾何学シンポジウム 2020 の世話役をつとめた. 同シンポジウムは, 1974 年から兵庫県城崎町で開催されてきた日本の代数幾何学分野における代表的なシンポジウムの一つである. 2019 年度までは対面開催であったが, 新型コロナウイルスの影響を受け, 初のオンライン (Zoom) 開催となり, 他の世話役と協力し準備を進め, 無事に開催に導いた<sup>†</sup>. 両氏と共同で編纂した本シンポジウム報告集 [1] が 2021 年 1 月に京都大学の情報レポジトリ紅 (KURENAI) から発行された.

(2) 2021 年度の主な研究実績は以下のとおりである:

- ③ 次数  $d$  が 3 または 4 の非特異 del Pezzo 曲面に含まれる空間曲線に対し, 曲線の射影空間内での変形障害を計算し, ヒルベルトスキームの非被約成分の例を新たに構成した.
- ④ Gruson-Peskine が与えた  $\mathbb{P}^3$  のヒルベルトスキームの非被約成分の例 ('82) について再考察し, 非正規 3 次曲面に含まれる空間曲線の変形障害と曲線の射影の関係について調べた.

非特異 3 次曲面 ( $d = 3$ ) に含まれる空間曲線の変形障害については, 近年の報告者の研究 ([9]) により, 曲面上の直線 (第 1 種例外曲線) との関係が注目され, 理解が進んでいる. 本研究では結果を一般次数の del Pezzo 曲面の場合に一般化するため,  $d = 4$  の場合について考察し上記の結果を得た. 本研究課題の主題である射と障害の関係について調べるため, 被障害曲線 (obstructed curve) の具体例の構成にも取り組んだ.  $\mathbb{P}^4$  内の 3 次スクロール

\*本報告は 2020 年度のみ研究課題 17K05210 の成果報告と一部重複する. 同課題は新型コロナウイルスの感染拡大による影響を受け研究計画が変更され, 補助事業期間が 20 年度まで延長された.

<sup>†</sup>シンポジウムがオンライン開催となったことにより, 講演者の旅費が不要になるなど, 本科研費の使用計画に一部変更が生じた.

の  $\mathbb{P}^3$  への一般射影は非正規 3 次曲面に等しい. 3 次スクロール上の曲線の変形と非正規 3 次曲面上の曲線の変形を比較し, 射影と障害の関係の理解に努めた. 2021 年 9 月にドイツ Oberwolfach 研究所と京都大学数理解析研究所を Zoom でつないで行われた共同ワークショップ “Symmetries on Polynomial Ideals and Varieties” に参加し, 研究上の刺激を受けた. また他の参加者を通じてヒルベルトスキームに関する有益な情報を得た.

(3) 最終年度の研究実績は以下のとおりである:

- ⑤ (一般次数の) 非特異 del Pezzo 曲面に含まれる空間曲線に対し, ヒルベルト旗スキームが対応する点において非特異かつ期待次元を持つことを証明した. 応用として (一部の曲線に対し) ヒルベルトスキームの対応する点における次元と非特異性を決定した.
- ⑥ 4 次 del Pezzo 曲面上の空間曲線に対してはより詳細な調査分析を行った. とくに余次元 3 の空間曲線のヒルベルトスキームにおいて, 生成点において被約でないような既約成分の例が得られた.

3 次元射影空間内の曲線 (空間曲線) は 19 世紀末から研究されている代数幾何学における古典的研究対象の一つである. 中でも非特異 3 次曲面に含まれる曲線は, 同曲面の持つ美しい性質 (射影平面の 6 点爆発と同型で  $E_6$  型の対称性をもつ) により詳しく研究されてきた. 未解決予想の一つとして Kleppe-Ellia 予想がある. 本予想は空間曲線のヒルベルトスキームの非被約成分に関する予想として提起されたが, 本質的に同スキームの次元に関する予想と捉えることが可能である. 解決のためには接空間の次元が大きい場合にスキームとしての次元を決定する必要がある, そのため技術的困難が生じた. この困難を克服するため今後も変形障害に関する研究をさらに進め, 予想の解決にむけて努力する.

研究期間全体を総括する. 3 本の論文 ([7, 8, 9]) が受理され出版された. 1 つ目はエンリケス・ファノ三様体 (EF3) 上の曲線の変形障害に関する研究で, EF3 上のヒルベルトスキームが生成的に被約でない既約成分をもつための十分条件を与えた. 2 つ目は 3 次元多様体上の曲線の変形障害に関する研究で, 報告者の以前の結果の誤りを修正し, 向井・那須の判定法の新たな一般化を得た. 3 つ目は空間曲線のヒルベルトスキームの研究である. 上記の Kleppe-Ellia 予想を特別な条件を仮定して証明し, 部分的に解決した. 研究期間全体を通して, コロナ禍における教育負担の増大, 城崎代数幾何学シンポジウムをはじめとする研究集会のオンライン開催 (と出張の取りやめ) など, 研究活動は大きな影響を受けた. 一方, コロナの影響が比較的少なかった 2022 年度に上記研究成果に関する 6 件の口頭発表を行った. 今後は Kleppe-Ellia 予想の完全解決に向けたいくつかの取り組みを継続して進めていきたい.

## REFERENCES

- [1] A. Ito, H. Sato, and H. Nasu, editors. **代数幾何学シンポジウム記録**, volume 2020. 京都大学数理解析研究所, 2021. [Kinosaki Algebraic Geometry Symposium 2020] Date: Oct. 20, 2020 (Tue) - Oct. 23, 2020 (Fri), Venue: Zoom Organizers: Atsushi Ito (Nagoya University), Hirokazu Nasu (Tokai University), Hiroshi Sato (Fukuoka University).
- [2] S. Mukai and H. Nasu. Obstructions to deforming curves on a 3-fold, I: A generalization of Mumford’s example and an application to Hom schemes. *J. Algebraic Geom.*, 18(4):691–709, 2009.
- [3] D. Mumford. Further pathologies in algebraic geometry. *Amer. J. Math.*, 84:642–648, 1962.
- [4] H. Nasu. Obstructions to deforming curves on a 3-fold, II: Deformations of degenerate curves on a del Pezzo 3-fold. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 60(4):1289–1316, 2010.
- [5] H. Nasu. Obstructions to deforming curves on a 3-fold, III: Deformations of curves lying on a  $K3$  surface. *Internat. J. Math.*, 28(13):1750099, 30, 2017.
- [6] H. Nasu. Obstructions to deforming curves on a prime Fano 3-fold. *Math. Nachr.*, 292(8):1777–1790, 2019.
- [7] H. Nasu. Corrigendum to “Obstructions to deforming curves on a 3-fold, III: Deformations of curves lying on a  $K3$  surface”. *Internat. J. Math.*, 31(12):2092001, 6, 2020.
- [8] H. Nasu. Obstructions to deforming curves on an Enriques-Fano 3-fold. *J. Pure Appl. Algebra*, 225(9):106677, 15, 2021.
- [9] H. Nasu. Obstructions to deforming space curves lying on a smooth cubic surface. *Manuscripta Math.*, 2022. Published online on 11 June 2022, 25 pp.

## 5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計4件（うち査読付論文 3件/うち国際共著 0件/うちオープンアクセス 2件）

1. 著者名 Nasu Hirokazu	4. 巻 -
2. 論文標題 Obstructions to deforming space curves lying on a smooth cubic surface	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 manuscripta mathematica	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s00229-022-01404-z	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 那須弘和	4. 巻 20
2. 論文標題 Primary obstructions to deforming embedded curves and an application to the Hilbert scheme of space curves	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 第20回代数曲線論シンポジウム（米田二良先生,大淵朗先生退職記念）報告集	6. 最初と最後の頁 24--36
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -
1. 著者名 Nasu Hirokazu	4. 巻 31
2. 論文標題 Corrigendum to "Obstructions to deforming curves on a 3-fold, III: Deformations of curves lying on a K3 surface"	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 International Journal of Mathematics	6. 最初と最後の頁 2092001 ~ 2092001
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1142/S0129167X20920019	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -
1. 著者名 Nasu Hirokazu	4. 巻 225
2. 論文標題 Obstructions to deforming curves on an Enriques-Fano 3-fold	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Journal of Pure and Applied Algebra	6. 最初と最後の頁 106677 ~ 106677
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1016/j.jpaa.2021.106677	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計6件（うち招待講演 4件 / うち国際学会 1件）

1. 発表者名 那須弘和
2. 発表標題 3次元多様体上の曲線の第1変形障害について
3. 学会等名 日本数学会2022年度秋季総合分科会
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 那須弘和
2. 発表標題 Obstructions to deforming space curves lying on a smooth cubic surface
3. 学会等名 日本数学会2022年度秋季総合分科会
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 那須弘和
2. 発表標題 Primary obstructions to deforming embedded curves and an application to the Hilbert scheme of space curves
3. 学会等名 第20回代数曲線論シンポジウム（米田二良先生，大淵朗先生退職記念）（招待講演）
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 那須弘和
2. 発表標題 楕円曲線束の構成とエンリケス・ファノ三様体のヒルベルトスキーム
3. 学会等名 湯布院代数幾何学ワークショップ（招待講演）
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 那須弘和
2. 発表標題 代数多様体上の曲線の変形障害とヒルベルトスキームについて
3. 学会等名 第18回代数・解析・幾何学セミナー（招待講演）
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 Hirokazu Nasu
2. 発表標題 Primary obstructions to deforming embedded curves and an application to the Hilbert scheme of space curves
3. 学会等名 21st Affine Algebraic Geometry meeting（招待講演）（国際学会）
4. 発表年 2023年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

<p>研究者ホームページ  <a href="https://fujj.ss.u-tokai.ac.jp/nasu/">https://fujj.ss.u-tokai.ac.jp/nasu/</a>          東海大学総合理工学研究科 研究事例紹介（所属研究機関ページ）  <a href="https://www.u-tokai.ac.jp/uploads/sites/19/2021/03/nasu.pdf">https://www.u-tokai.ac.jp/uploads/sites/19/2021/03/nasu.pdf</a></p>
----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

6. 研究組織		
氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計1件

国際研究集会 Kinosaki Algebraic Geometry Symposium 2020 (Zoom meeting)	開催年 2020年～2020年
---------------------------------------------------------------------	--------------------

8 . 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------