

令和 5 年 6 月 9 日現在

機関番号：11301

研究種目：基盤研究(C)（一般）

研究期間：2020～2022

課題番号：20K03551

研究課題名（和文）代数的組合せ論及びその諸分野との連携

研究課題名（英文）Algebraic combinatorics and its ties with other areas

研究代表者

田中 太初（Tanaka, Hajime）

東北大学・情報科学研究科・准教授

研究者番号：50466546

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 3,300,000円

研究成果の概要（和文）：グラフに付随する非可換半単純行列代数の表現論の応用の研究を行い、量子ウォークに基づくグラフ上の頂点探索アルゴリズムや、グラフ上の量子中心極限定理等に関する成果を得た。これらに加え、量子確率論の観点からのグラフの研究や、アソシエーションスキームの双対性に関する予想の部分的な証明等も行った。研究計画期間終盤には他にもある種の量子アルゴリズムやグラフィックレンダリング等に関する複数のプロジェクトに関わっており、順次研究成果を公開していく予定である。

研究成果の学術的意義や社会的意義

代数的グラフ理論或いはグラフのスペクトル理論はそもそも情報理論等の工学的分野とも直接関わって発展してきたが、本研究計画では量子情報理論や量子確率論、さらには工学の分野（グラフィックレンダリング）についても成果を上げることができ、数学の理論・応用の両側面について十分な貢献を行うことができたものと考えられる。特に、量子情報理論の研究は2018年頃より構想を進めてきたものであり、本研究計画期間中に予定通り実施できたのは大きな進展である。

研究成果の概要（英文）：I explored applications of the representation theory of noncommutative semisimple matrix algebras associated with a graph and obtained results, such as vertex search algorithms on graphs based on quantum walks and quantum central limit theorems on graphs. Besides, I worked on research on graphs from the viewpoint of quantum probability theory and partial proof of a conjecture about the duality of association schemes, etc. At around the end of the period of the research plan, I was also involved with multiple projects on certain quantum algorithms and graphic rendering, etc., and I plan to publicize the outcomes as soon as they are ready.

研究分野：代数的組合せ論・代数的グラフ理論

キーワード：距離正則グラフ アソシエーションスキーム Terwilliger 代数 グラフのスペクトル 量子ウォーク  
量子中心極限定理

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属します。

## 1. 研究開始当初の背景

アソシエーションスキーム(AS)は有限群の等質空間の組合せ的性質を抽出した概念であり、距離正則グラフ(DRG)には2点等質空間に相当するASが自然に対応する。ASは元々実験計画法で導入された概念であるが、Delsarte (1973)の理論により、符号・デザイン等の研究に統一的枠組みを提供する。Leonard (1982)は、Delsarte が導入した $Q$ -多項式 DRG の隣接代数の「双対性」が1変数 Askey-Wilson 直交多項式及びその特殊化や極限として得られる直交多項式の多くを特徴付けることを示し、これをきっかけとして、Askey-Wilson 多項式を最上位( ${}_4\phi_3$ )とする1変数超幾何直交多項式の階層である Askey スキームが提唱された。 $Q$ -多項式 DRG の構造の研究のための道具として、Terwilliger (1992)は各頂点に対し現在 Terwilliger 代数と呼ばれる非可換半単純行列 $C$ -代数を導入した。可換代数である隣接代数は Terwilliger 代数の部分代数である。なお、量子確率論で用いられる古典確率変数の量子分解は一種の「非可換化」の操作であるが、尾畑や洞等により研究されている DRG の隣接行列の量子分解は、隣接代数から Terwilliger 代数を構成するプロセスにほぼ相当する。

通常の意味での符号・デザインはそれぞれ Hamming グラフ・Johnson グラフの部分構造であり、上述の Delsarte の理論の神髄は、隣接代数の双対性に基づく符号・デザインの線形計画境界と、付随する1変数直交多項式の性質を巧妙に組合せた点にあった。この Delsarte 理論、さらにはより一般に代数的グラフ理論やグラフのスペクトル理論に於ける中心的な興味・関心は、(a)隣接代数の表現(=大域的情報)に基づくグラフの部分構造の解析、及び(b)隣接代数の「代数的性質」とグラフの「組合せ的性質」の相互関係にあると言えるであろう。

## 2. 研究の目的

上述の(b)を精密化・非可換化したのが Terwilliger の理論であり、本研究計画はさらに(a)の非可換化をも推し進めるものである。すなわち本研究計画では、Terwilliger 代数や関連した行列 $C$ -代数の表現論の研究を行う一方で、その成果の符号・デザイン理論等への広範な応用・展開を図った。符号・デザイン理論等の他にも、グラフに付随する Terwilliger 代数等の非可換代数の表現論と、直交多項式の理論や量子群の表現論、量子確率論・量子情報理論を含む他分野との結び付きは近年ますます深化しつつある。本研究計画ではこれら諸分野との連携をさらに一層追求するとともに、AS や DRG とは必ずしも限らない種々の有限単純グラフにまで対象を広げていくことを目指した。

## 3. 研究の方法

本研究計画では特に海外の共同研究者を積極的に増やすことを目指し、研究発表旅費及び研究打合せ旅費が助成金の使途予定の大部分を占めていた(他はパソコンや書籍の購入費等)。しかしながら、新型コロナウイルスの影響により、招待講演者として呼ばれていた3件の国際集会への参加を含め、出張は海外・国内ともに全て取り止めることとなってしまった。これによる本研究計画への影響はもちろん小さくはなかったが、代わりに Google Meet や Zoom 等のオンライン会議ツール等も駆使することにより、上記の目標はある程度満足の行く形で達成できたと考える。また、本研究計画に関連した下記の研究集会の開催に組織委員として関わり、情報収集の取り組みの一環とした。

- (1) スペクトラルグラフ理論および周辺領域 第9回研究集会, オンライン, 令和2年8月.
- (2) スペクトラルグラフ理論および周辺領域 第10回研究集会, オンライン, 令和3年11月.
- (3) スペクトラルグラフ理論および周辺領域 第11回研究集会, おりづるタワー(広島)&オンライン, 令和4年11月.

## 4. 研究成果

(1) 私の学生の Tao Wang 氏と共同で、Van Dam と Koolen により 2005 年に発見された非常に特異な DRG である捻れ Grassmann グラフの Terwilliger 代数の表現の研究を「thin」と呼ばれる場合について前課題から引き続き行い、既約加群を分類・記述することに成功した。共著論文は既出版された(Electron. J. Combin. 28 (2020))。捻れ Grassmann グラフは、Terwilliger 代数が「基点」の選び方に応じて thin と non-thin のいずれも取り得る、知られている初めての無限系列であり、前者の場合について構造を完全に決定できたことの意義は大きい。先行研究として、

Bang, Fujisaki, Koolen (2009)がごく一部の既約加群のパラメータを求めていたが、本成果は彼らの結果とももちろん一致する。

(2) Masoumeh Koohestani 氏 (K. N. Toosi 工科大学) 及び尾畑伸明氏 (東北大学) と共同で、所謂**古典的パラメータ**を持つ DRG に対する**量子中心極限定理**の研究をやはり前課題から継続して行い、可能な極限を古典的パラメータの挙動によって記述した。さらに、これらのグラフの正規化したスペクトル分布の弱収束極限を求めた。既知の DRG の(直径が発散する)無限系列は全て古典的パラメータを持つか、或いはそのようなものと密接に関連しており、本研究により感覚的には大部分の DRG をカバーしたことになる。共著論文は既に出版された (SIGMA Symmetry Integrability Geom. Methods Appl. 17 (2021))。なお、真空状態の場合にはこれらの極限は Askey スキームに属する直交多項式系の極限操作に対応しているため、本研究ではより一般の **Gibbs 汎関数** を取り扱った。また、先行研究では極限の存在の十分条件を与えたものが多いが、本研究の条件は本質的に必要十分である。

(3) Tao Wang 氏、及び Xiaoye Liang 氏 (安徽大学) ・Ying-Ying Tan 氏 (安徽建築大学) と共同で、AS の **scaffolds** に関する研究を行った。AS に関する結果には双対的なものが多く存在し、それらの証明自体もしばしば双対的に進行する。このプロセスを厳密に定式化する上で登場するのが scaffolds であり、Martin (2021)により単独の理論として整備された。Martin は特に、scaffolds に関するある命題が真ならば、それを「双対 scaffolds」に置き換えても真であろうと予想したが、本研究では、AS が頂点集合上に正則に働く可換な自己同型群を持つ場合について予想を証明した。共著論文は既に出版された (Linear Algebra Appl. 638 (2022))。

(4) 私の学生の Mohamed Sabri 氏及び LNCC (ブラジル) の Renato Portugal 氏と共同で、**量子ウォーク**に基づくグラフ上の頂点探索アルゴリズムの研究を行った。量子ウォークには大別して連続時間と離散時間の2種類がある。Wong (2016)は直径3の Johnson グラフについて連続時間量子ウォークによる探索アルゴリズムを考察し、古典的アルゴリズムの2乗高速化を実現することを示したが、本研究ではまずこの結果を一般の直径の Johnson グラフに拡張し、さらに数学的に厳密な証明を与えた (Quantum Inf. Process. 21 (2022))。一方、離散時間量子ウォークに関しては、Xue, Ruan, Liu (2019)が直径3の Johnson グラフについて同様の結果を報告していたが、これについても一般の直径に拡張し、やはり数学的に厳密な証明を与えることに成功した (J. Phys. A 55 (2022))。これら2編の論文では1頂点の探索を取り扱っていたが、Portugal 氏の学生の Pedro Lugão 氏も加えて2頂点の探索についても引き続き検討し、一般の直径の Johnson グラフ上の連続時間量子ウォークの場合に同様の結果を示した。この成果については現在共著論文を投稿中である (arXiv:2203.14384)。

(5) 圧縮センシング等にも応用を持つ**実 equiangular tight frames (ETFs)**の既存の例には、直径2の DRG である**強正則グラフ**のユークリッド空間への埋め込みから構成されるものが多いが、坂内英一氏・悦子氏、及び Wei-Hsuan Yu 氏・Chin-Yen Lee 氏 (国立中央大学) と共同で、自己同型群がランク3に働く強正則グラフから得られる実 ETFs を完全に決定した。現在共著論文を投稿中である (arXiv:2202.09858)。ランク3の強正則グラフは前世紀中に分類が完了していたが、無限系列及び散在的な例のいずれも膨大に存在する。Brouwer, Van Maldeghem (2022)の書籍ではこれらを全てリストアップしており、本成果では彼らの記述に従った。なお、見つかった実 ETFs のパラメータは全て既に存在が知られているものではあったが、それらの同値性については不明な点がいくつかあり、今後の検討課題としたい。

(6) 上記(2)で DRG 上の Gibbs 汎関数を考察したが、Gibbs 汎関数が状態であるための条件の一つに、所謂**Q-行列**の半正定値性がある。Q-行列は一つのパラメータに依存するが、半正定値になるようなパラメータの集合は閉区間  $[-1,1]$  に含まれる。この集合を決定することは一般には難しい問題だと思われるが、本研究ではこの集合が最大、すなわち  $[-1,1]$  に一致するようなグラフの組合せ的特徴付けを行った。論文は研究計画期間終了直後に出版された (Linear Algebra Appl. 671 (2023))。なお、上記(1)-(5)では有限単純グラフのみを取り扱っていたが、ここでは無限単純グラフも許している。例えば木の場合に上述の集合が  $[-1,1]$  に一致することは Bożejko 等による先行研究で示されていたが、この事実は本研究で得られた組合せ的特徴付けからも直ちに導かれる。

(7) 上記(4)で述べた量子ウォークに基づくグラフ上の探索アルゴリズムの研究では Johnson グラフの系列を主に取り扱ったが、これは有名な決定問題である **Element Distinctness Problem** との関連を意識してのことであった。この問題については Ambainis (2007)による量子アルゴリズムが知られているが、このアルゴリズムの主要部分は Johnson グラフの特殊な頂点部分集合を探索することと解釈できるのである。(4)の共同研究の発展として Ambainis の量子アルゴリズムを新たな観点から見直すことを試み、必要となる計算の大部分を研究計画期間終了時まで

に終わることができた。この成果については今後共著論文として公表する予定である。

(8) 国内外の複数の工学系研究者とグラフィックレンダリングに関する共同研究を行い、私自身は要請された条件を満たす 2 次元球面上の新たな確率密度関数の考案等を担当した。共著論文を現在国際会議に投稿中であるが、会議の規定上、本稿では詳細は記載しない。この共同研究は元々ある種のグラフの考察から始まっており、本研究計画の派生的な成果とみなせる。ただし、最終的には他のアプローチを採用することになったため、提案した手法は 1. や 2. で述べた内容と直接的には関連していない。本共同研究の後継プロジェクトにも引き続き関わっていく予定である。

## 5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計6件（うち査読付論文 6件/うち国際共著 4件/うちオープンアクセス 2件）

1. 著者名 Hajime Tanaka, Tao Wang	4. 巻 27
2. 論文標題 The Terwilliger algebra of the twisted Grassmann graph: the thin case	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 The Electronic Journal of Combinatorics	6. 最初と最後の頁 #P4.15
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.37236/9873	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -
1. 著者名 Masoumeh Koohestani, Nobuaki Obata, Hajime Tanaka	4. 巻 17
2. 論文標題 Scaling limits for the Gibbs states on distance-regular graphs with classical parameters	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Symmetry, Integrability and Geometry: Methods and Applications	6. 最初と最後の頁 104
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.3842/SIGMA.2021.104	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 該当する
1. 著者名 Xiaoye Liang, Ying-Ying Tan, Hajime Tanaka, Tao Wang	4. 巻 638
2. 論文標題 A duality of scaffolds for translation association schemes	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Linear Algebra and its Applications	6. 最初と最後の頁 110 ~ 124
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1016/j.laa.2021.12.018	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する
1. 著者名 Hajime Tanaka, Mohamed Sabri, Renato Portugal	4. 巻 21
2. 論文標題 Spatial search on Johnson graphs by continuous-time quantum walk	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Quantum Information Processing	6. 最初と最後の頁 74
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s11128-022-03417-9	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Hajime Tanaka, Mohamed Sabri, Renato Portugal	4. 巻 55
2. 論文標題 Spatial search on Johnson graphs by discrete-time quantum walk	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical	6. 最初と最後の頁 255304
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1088/1751-8121/ac6f30	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Hajime Tanaka	4. 巻 671
2. 論文標題 Characterizing graphs with fully positive semidefinite Q-matrices	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 Linear Algebra and its Applications	6. 最初と最後の頁 59 ~ 66
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.laa.2023.04.018	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計6件 (うち招待講演 2件 / うち国際学会 3件)

1. 発表者名 田中 太初
2. 発表標題 Scaling limits for the Gibbs states on distance-regular graphs with classical parameters
3. 学会等名 RIMS 共同研究 (公開型) 「有限群論, 代数的組合せ論, 頂点代数の研究」
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Hajime Tanaka
2. 発表標題 Spatial search on Johnson graphs by continuous-time quantum walk
3. 学会等名 Workshop on Algebraic Graph Theory and Quantum Information (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Hajime Tanaka
2. 発表標題 Spatial search on Johnson graphs by discrete-time quantum walk
3. 学会等名 Workshop on Algebraic Combinatorics (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 田中 太初
2. 発表標題 量子ウォークに基づく Johnson グラフ上の探索アルゴリズム
3. 学会等名 代数学の広がり
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Hajime Tanaka
2. 発表標題 Scaling limits for the Gibbs states on distance-regular graphs with classical parameters
3. 学会等名 The 19th Workshop: Noncommutative Probability, Noncommutative Harmonic Analysis and Related Topics, with Applications (国際学会)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 田中 太初
2. 発表標題 Characterizing graphs with fully positive semidefinite Q-matrices
3. 学会等名 RIMS共同研究 (公開型) 「有限群論, 代数的組合せ論, 頂点代数の研究」
4. 発表年 2022年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

個人ウェブサイト  
<https://hajimetanaka.org/>

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
--	---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関			
ブラジル	LNCC			
中国	安徽大学	安徽建築大学		
その他の国・地域 (台湾)	国立中央大学			
イラン	K.N. Toosi University of Technology			