様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９　（共通）

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

令和　７ 年　 ５ 月 ２４ 日現在

機関番号：３２６５７
研究種目：基盤研究(C)（一般）
研究期間：2020～2024
課題番号：２０Ｋ０３６１７

研究課題名（和文）広義正則曲面の微分幾何に関する体系的研究

研究課題名（英文）Systematic research for differential geometry of regular surfaces in a wider sense

研究代表者
國分　雅敏（Kokubu, Masatoshi）

東京電機大学・工学部・教授

研究者番号：５０２８７４３９

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　1,600,000円

研究成果の概要（和文）：本研究では、通常の滑らかな曲面に加え、特異点を含む曲面にも注目し、それらを「広義の正則曲面」として幾何学的・解析的に研究した。特に、3次元のde Sitter空間における平均曲率1のカテノイドについて、空間の制約を超えた解析的拡張の存在と「解析的に極大」であることを示した。また、双曲型空間では正多面体の対称性をもつ平坦な波面を構成し、5種類の具体的な例とその幾何的特徴を明らかにした。さらに、「解析的完備性」「二重錐多様体」といった新たな概念も導入し、特異点をもつ曲面の構造理解を深めた。Gauss曲率の等高線が同心円となる曲面も発見し、これらの成果は論文や学会発表を通じて公開された。

研究成果の学術的意義や社会的意義
本研究では、特異点を許容する広義の正則曲面という新たな視点を導入し、従来の滑らかな曲面理論を拡張した。特に、de Sitter 空間内のカテノイドの解析的極大性の証明や、双曲空間における対称性をもつ波面の構成は、曲面の微分幾何に新たな知見を加えるものである。また、「解析的完備性」や「二重錐多様体」といった概念の提案は、複素解析や位相幾何との接点を広げ、今後の理論展開の足がかりとなる。さらに、Gauss 曲率の等高線構造に注目した研究は、曲面分類への新たな手がかりを提供している。

研究成果の概要（英文）：In addition to ordinary smooth surfaces, we focused on surfaces containing singularities and studied them geometrically and analytically as regular surfaces in a wider sense. In particular, for a catenoid of mean curvature 1 in 3-dimensional de Sitter space, we showed the existence of analytic extensions beyond the constraints of space and that they are analytically maximal.
In hyperbolic spaces, flat wavefronts with regular polyhedral symmetry were constructed, and five specific examples and their geometric features were identified. Moreover, new concepts such as analytic completeness and double cone manifolds were introduced to deepen our understanding of the structure of surfaces with singularities. We also discovered surfaces for which Gauss curvature contours are concentric circles. These results were made public through papers and conference presentations.

研究分野：微分幾何

キーワード：微分幾何　広義の正則性　解析的拡張　特異点　曲率

※科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属します。

様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１（共通）

１．研究開始当初の背景

このテーマが本格的に研究対象とされ始めたのは本課題が開始された数年前のことであり、新たな研究分野として注目されていました。特に、混合型曲面に関する研究は、日本の研究者や研究グループを中心に活発化され、申請者自身もその研究に取り組む一人でした。理論的な枠組みが徐々に整備されつつあるものの、未解決の課題も依然として多く、今後のさらなる発展が期待される分野と見られていました。
古い文献をひもとくと、むしろ現代よりも 19 世紀から 20 世紀初頭にかけての時期の方が、特異点をもつ曲面が盛んに研究されていたように見受けられます。例えば、Enneper、Kuen、Dobriner、Sievert らによる 19 世紀の研究には、特異点を含むガウス曲率一定の曲面が登場します。こうした特異点付き曲面の微分幾何的な研究には、一時的な空白期が存在していたように思われます。ちょうど多様体論が構築・整備されていた時代に、その流れから取り残されてしまった感があります。しかしながら、これらの古典的成果を現代的な視点から再検討することで、新たな発見が期待される分野でもあります。
その一例として挙げられるのが、Lorentz-Minkowski 空間における平均曲率ゼロの曲面です。これらは、正定値および不定値という異なる性質をもつ誘導計量が混在するにもかかわらず、全体として平均曲率が常に 0 となっている解析的曲面です。中には特異点をもつものもあれば、もたないものも存在します。もともと親和性があるとは言い難い正定値計量と不定値計量の領域に、共通して「平均曲率 0」という性質が現れる「深い理由」等は、解明されていない状況でした。

２．研究の目的

本研究では、特異点を持つことを許容する曲面、特に波面や型変化（タイプチェンジ）を伴うような特異な振る舞いを示す曲面を「広義の正則曲面」と総称し、それらの微分幾何的性質や理論的背景を体系的に明らかにすることを主たる目的としました。これまでの微分幾何学においては、通常、正則性（滑らかさ）を前提とした曲面の理論が中心的に扱われてきましたが、本研究では、あえて特異性を内在的に持つような曲面にも焦点を当て、それらの構造的な理解を深めようと試みました。
研究の出発点としては、まず 3 次元ユークリッド空間内における古典的な曲面理論を再検討し、そこに現れる特異点や微分幾何的不変量の振る舞いを詳細に解析することから始めました。その後、ユークリッド空間にとどまらず、より一般的な定曲率空間、さらにはローレンツ・ミンコフスキー空間のような不定値計量を持つ半リーマン空間にまで対象を広げました。そして、それらの空間内に定義される広義の正則曲面と、そこから自然に導かれる新しい幾何構造の特徴について、理論的に深く掘り下げることを方針としました。最終的には、ユークリッド空間から不定値空間までを包括するような、統一的かつ普遍的な理論の構築を視野に入れ研究することを目的としました。
外部空間がローレンツ・ミンコフスキー空間のような不定値計量を有する場合、曲面上に誘導される計量は、しばしば符号が変化する「混合型」となります。このような混合型計量を持つ曲面においては、通常の微分幾何学的な不変量、たとえば主曲率や平均曲率といった量が、計量の符号が変化する境界において不連続になってしまうことが一般的です。しかし興味深いことに、1 階微分に基づく幾何量が不連続あるいは定義不能となる場合であっても、2 階微分以降に由来する曲率やそれに関連する不変量の多くは、混合型の境界を越えても連続的に拡張可能であり、整合的な理論が構築できる可能性があると思われました。この点に着目することで、特異点や混合型構造を持つ曲面は、単なる例外的存在ではなく、正則曲面の理論を自然に拡張する重要な対象であると捉え直すことができます。
したがって本研究では、これらの混合型計量を持つ曲面、あるいは特異点を含むような曲面を「広義の正則曲面」として積極的に扱い、その具体的な微分幾何的性質を明らかにすることを具体的な目標としました。このような曲面には、型変化点を持つ誘導計量、特異点を含む構造、あるいは発散を許容するような曲率関数など、従来の理論では十分に説明されてこなかった複雑で特異な幾何構造が付随します。こうした構造は、それ自体としても非常に興味深く、未解明の現象が多く残されております。
このような問題群に対する関心と、それらに対して理論的に一貫した枠組みを構築したいという動機が、本研究を遂行する上での強い原動力となっていました。

３．研究の方法

(1) 本研究は数学理論に関するものであり、その研究手法としては、文献調査、他の研究者による成果発表の聴講、さらには共同研究者とのディスカッションなど、基本的には従来通りのオーソドックスな方法を採用しました。ただし、これまでと異なる点として、COVID-19 の感染拡大を契機に、オンラインでのコミュニケーションや研究活動の手法が導入され始めたことが挙げられます。
一方で、コロナ禍の影響により、研究時間の確保が難しくなったことに加え、他の研究者との情報交換も従来のように円滑には行えない状況が続きました。こうした環境的制約により、研究の進行に一定の遅れが生じ、結果として本研究の期間は当初の予定よりも 2 年延長することとなりました。

(2) 研究期間の後半には、コロナ禍の収束傾向もあり、共同研究者である梅原雅顕氏および山田光太郎氏と、平均して年 6 回程度の頻度で、ディスカッションのための会合やセミナーを開催しました。これらの会合は主に、東京電機大学東京千住キャンパス、あるいは東京工業大学大岡山キャンパスにて実施されました。
会合の場では、研究テーマに関連する論文や文献の正確な理解、問題点の指摘、既存問題の解決報告、新たな研究課題の提起などを通じて、研究の進捗状況を互いに報告・検証し、活発な討議を行いました。
さらに、共著論文の執筆者である Wayne Rossman 氏（神戸大学大学院教授）、藤森祥一氏（岡山大学大学院教授）、川上裕氏（金沢大学大学院准教授）に加え、今後共著論文の執筆を予定している S.D. Yang 氏（Korea University 教授）らとの連携のもと、研究成果の検証および研究の方向性の確認を目的として、彼らの所属機関を訪問しました。これらの訪問では、1 回あたり 3 日程度の集中セミナーを年平均 2 回実施し、密度の高い意見交換を行いました。

(3) 日本数学会年会や総合分科会、幾何学シンポジウムをはじめとする各種研究集会に積極的に参加し、新たな知見の獲得や、研究者間の意見交換・情報共有を行いました。

４．研究成果

２０２１年度においては、研究成果に関する口頭発表（招待講演）１件を行い、研究成果に関する論文１編が出版されました。内容は、ともに次の研究成果（１）に関するものです：

（１）双曲型空間において、平坦波面と呼ばれる曲面族があります。それは、ある種の特異点を許容した Gauus 曲率がいたるところ 0 であるような曲面です。これまでにも多数の先行研究がありますが、本研究では正多面体と同じ対称性をもつ弱完備有限型の平坦波面で、ある種の仮定を満たすものをすべて分類した。ここでいう「ある種の仮定」は曲面が不必要に複雑でないことを要請するきわめて自然な仮定です。具体的には「双曲 Gauss 写像のひとつは写像度１をもつこと」と「正多面体の頂点と同じ個数の埋め込まれた正則エンドをもつこと」を仮定します。正四面体と同じ対称性をもつものは既知でありましたが、それ以外、すなわち正 n 面体（n=6,8,12,20）と同じ対称性をもつものは今までに知られていなかったものです。

２０２２年度においては、いくらかの新しい結果（未発表）を含めて研究成果（１）に関する口頭発表（招待講演）1 件を行い、次の研究成果（２）に関する共著論文１編が出版されました。

（２）“解析的完備性”という概念を定め、実解析写像の像に対してこれが成り立つとき、その写像は解析的延長を持たないことを示しました。また、この“解析的完備性”の概念に対する有用な判定基準として、“弧-適切性（arc-properness）”と呼ばれる連続写像の性質を定義しました。これは、写像の適切性（properness）を非常に弱めたバージョンとみなすことができます。この概念の応用として、定平均曲率を持つ特定のクラスの曲面（“G-カテノイド”と呼ばれる幾何学的対称性をもつ曲面）や、それらのドゥジッター空間における解析的延長について、その解析的完備性を判定することで、明らかにしました。

２０２４年度においては、研究成果に関する口頭発表１件を行い、研究成果に関する論文１編が出版された。内容は、ともに次の研究成果（３）に関するものです：

（３）３次元ユークリッド空間の曲面が、ある平面に関してグラフ表示されたとき、その Gauss 曲率関数のその平面上への等高線が同心円上の等高線を描くとき、その曲面は同心円状の等 K 線をもつという定義を与えました。その上で、この特徴をもつ曲面族 $x_{m,c}$ を発見しました。さらには、これらを特徴づける定理として、同心円状の等 K 線をもち、面積要素が各等 K 線に沿って不変であれば, 曲面は螺旋曲面か曲面 $x_{m,c}$ と局所的に合同であることを証明しました。また、類似の性質をもつ曲面として、等高線が平行直線族なる場合のものも発見し、それらにつても、同様の結果を得ることができました。

５．主な発表論文等

〔雑誌論文〕　計3件（うち査読付論文　3件／うち国際共著　2件／うちオープンアクセス　1件）

１．著者名 Shoichi Fujimori, Yu Kawakami, Masatoshi Kokubu	４．巻 115
２．論文標題 Surfaces with concentric or parallel K-contours	５．発行年 2024年
３．雑誌名 Journal of Geometry	６．最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s00022-024-00719-4	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 －

１．著者名 Shoichi Fujimori, Yu Kawakami, Masatoshi Kokubu,　Wayne Rossman, Masaaki Umehara, Kotaro Yamada and Seong-Deog Yang	４．巻 84
２．論文標題 Analytic extensions of constant mean curvature one geometric catenoids　in de Sitter 3-space	５．発行年 2022年
３．雑誌名 Differential Geometry and Its Applications	６．最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1016/j.difgeo.2022.101924	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

１．著者名 Masatoshi Kokubu	４．巻 113
２．論文標題 Flat fronts with polyhedral symmetry in hyperbolic　three-space	５．発行年 2022年
３．雑誌名 Journal of Geometry	６．最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s00022-022-00633-7	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 該当する

〔学会発表〕　計3件（うち招待講演　2件／うち国際学会　0件）

１．発表者名 川上裕，國分雅敏，藤森祥一
２．発表標題 同心円状または平行直線状の等 K 線をもつ曲面について
３．学会等名 日本数学会秋季総合分科会
４．発表年 2024年

１．発表者名 Masatoshi Kokubu
２．発表標題 On flat fronts with symmetry
３．学会等名 Workshop on Surface Theory --UY60--（招待講演）
４．発表年 2022年

１．発表者名 國分雅敏
２．発表標題 Flat fronts in hyperbolic three-space and related topics
３．学会等名 日本数学会本会（招待講演）
４．発表年 2022年

〔図書〕　計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

－

６．研究組織

	氏名 （ローマ字氏名） （研究者番号）	所属研究機関・部局・職 （機関番号）	備考
研究協力者	梅原　雅顕 (Umehara Masaaki)		
研究協力者	川上　裕 (Kawakami Yu)		
研究協力者	藤森　祥一 (Fujimori Shoichi)		

６．研究組織（つづき）

	氏名 （ローマ字氏名） （研究者番号）	所属研究機関・部局・職 （機関番号）	備考
研究協力者	山田　光太郎 (Yamada Kotaro)		
研究協力者	ラスマン　ウェイン (Rossman Wayne)		

７．科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕　計0件

８．本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関			
韓国	Korea University			