

令和 6 年 5 月 3 日現在

機関番号：13301

研究種目：若手研究

研究期間：2020～2023

課題番号：20K14298

研究課題名（和文）パラメーター付き跡公式とL関数の量子確率論的研究

研究課題名（英文）Quantum probabilistic study of parametrized trace formulas and L-functions

研究代表者

杉山 真吾（Sugiyama, Shingo）

金沢大学・数物科学系・准教授

研究者番号：70821817

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 3,200,000円

研究成果の概要（和文）：パラメーター付き跡公式を用いることによって、対称べきL関数の族の零点分布にL関数の特殊値の重みをつけた量に関する新たな現象を発見した。その現象とは、重み因子がL関数の中心値のときに限り、重み付き零点分布が重み無しの零点分布から変化するというものである。これをもとに、一般のL関数の族に対して重み付き零点分布に関する予想を立てた。さらにDirichlet L関数の族に対して予想を確認した(九州大学のAde Irma Suriajaya氏と共同)。以前に成果をあげたHecke固有値の代数的整数性およびHecke体への応用を論文として完成させた(信州大学の佐久川憲児氏と共同)。

研究成果の学術的意義や社会的意義

本研究では、L関数の零点分布はランダム行列の固有値分布と同じであろうというKatz-Sarnakの予想の重み付き版を考察した。L関数の特殊値による重み付き零点分布を考察することで、L関数の中心値の特異性を見出す契機となった。従来のL関数の零点分布は、重み付き零点分布であっても密度関数がランダム行列理論に出てくる5種類のいずれかに集約されていた。しかし本研究ではその5種類とは異なる密度関数を2種類発見した。またHecke固有値の代数的整数性は一般のHilbert保型形式と一般のSiegel保型形式の場合を扱っているため、論文が完成し皆が閲覧できる状態になったことには意義がある。

研究成果の概要（英文）：By a parametrized trace formula, we found a new phenomenon on the density of zeros of symmetric power L-functions weighted by L-values. The phenomenon is that the density is changed if and only if the weight factors are central L-values. Based on this, we suggested a conjecture on the weighted density of zeros of L-functions in a family. Furthermore, we confirmed the conjecture for a family of Dirichlet L-functions, which is a joint work with Ade Irma Suriajaya (Kyushu University). We completed to write a paper on the integrality of Hecke eigenvalues and its applications to Hecke fields. (The content of the paper itself was already completed essentially before.) This is a joint work with Kenji Sakugawa (Shinshu University).

研究分野：整数論

キーワード：保型L関数 保型形式 ディリクレL関数 零点分布 1レベル密度 特殊値 重み付き零点分布 ランダム行列

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属します。

1. 研究開始当初の背景

本研究では跡公式のパラメーター付き公式への一般化およびその応用を主題とした。その説明の前に「跡公式」と「Zagierの公式」について述べる。跡公式とは簡単に言えば、正方行列 A に対してその跡(トレース)を「 A の固有値の和(スペクトルサイド)」と「 A の対角成分の和(幾何サイド)」の2通りで表示する公式である。一番基本的な上半平面上の正則な1変数保型形式(楕円保型形式)の場合には、楕円保型形式の空間上のHecke作用素のトレースに対する跡公式が、楕円保型形式の空間の次元公式や楕円保型形式のFourier係数の分布を調べるために応用された。Zagierは楕円保型形式のレベルが一番簡単な場合に、Hecke作用素の跡公式をパラメーター付きに一般化した。通常の跡公式はパラメーター付き跡公式のパラメーターを特殊化したもの($s=1$ での留数)とみなせるようになり、この公式を使えばFourier係数だけでなく保型L関数の情報も抽出可能になった。Zagierの公式には様々な応用があり、例えば楕円保型形式の対称2次L関数の正則性を、志村の積分理論とは異なる新たな方法で示し、さらにそのL関数の臨界点(ある種の整数点)での特殊値がある超越数(周期)で割ると代数的数になることの新証明も与えた。これはL関数の特殊値の代数性と呼ばれ、Riemannゼータ関数の偶数点での特殊値をBernoulli数と円周率で記述する公式の高次元版とみなせる。また、「モチーフのL関数の臨界点での特殊値はある超越数(周期)で割ると代数的数になる」というDeligneの予想の傍証にもなっている。このような経緯により、本研究は当初はパラメーター付き跡公式の応用よりもまずZagierの跡公式の一般化に主眼が置かれていた。しかしながら、量子確率論的な手法や解釈を検討していくうちに、パラメーター付き跡公式を用いることで、L関数の零点と特殊値の情報を組み込んだ重み付き零点分布へ応用できることに気づいた。L関数の族の零点分布はランダム行列の固有値分布に一致するだろうというKatz-Sarnakの予想の重み付き版を考察することで、重み付き零点分布によりL関数の零点と特殊値の相互関係が明らかになるのではないかと考え、パラメーター付き跡公式の解析数論的応用に焦点を当てた。

2. 研究の目的

当初は量子確率論を用いてパラメーター付き跡公式を考察することで、整数論と物理学を結び付けることを目的とし研究を進めていた。しかし上記で述べたようにパラメーター付き跡公式の一般化よりも先に、パラメーター付き跡公式の応用面(L関数の重み付き零点分布)を追究した。この応用面においてもKatz-Sarnak予想のような、L関数の理論とランダム行列理論の間の対応(整数論と物理学の連携)がありそうで、整数論と物理学を結び付きそうな雰囲気が漂っているのが興味深い。しかしながら、L関数の中心値の重み付き零点分布はSiegel保型形式に付随するスピノールL関数の場合のKowalski, Saha, Tsimermanの研究、楕円モジュラー形式に付随するスタンダードL関数の場合のKnightly, Renoの研究しかなく、どちらも「L関数の中心値の重みをつけることで、零点分布が直交型からシンプレクティック型になる」という現象であった。たとえばL関数の族の零点分布がシンプレクティック型である場合、そのような族の中心値による重み付き零点分布は何に変化するのかなどは当時知られていなかった。このような経緯からKatz-Sarnakの予想の重み付き版を考察し、L関数の中心値の特異性や零点との関係や新たな解釈を見出すことを目的として進めることになった。

3. 研究の方法

L 関数の族が直交型の場合の特殊値の重み付き零点分布は以前から知られていたが、本研究では先行研究では考察されていなかったシンプレクティック型、ユニタリー型の L 関数の族を考察した。具体的には、対称 2 次 L 関数の族というシンプレクティック型、Dirichlet L 関数の族というユニタリー型の場合に重み付き零点分布を計算した。

楕円保型形式や Hilbert 保型形式に関するパラメーター付き跡公式を用いることで、対称 2 次 L 関数の特殊値をコントロールすることが可能である。これにより、対称 2 次 L 関数の零点分布に特殊値の重みを付けた量を主要項と誤差項に分けて計算した。まずパラメーター付き跡公式の幾何サイドの誤差項評価を一般的に評価し直し、イデアルなどのデータに関する依存度を明示的にした。この精密化された誤差項評価と L 関数に関する Weil の明示公式を組み合わせることで、対称 2 次 L 関数の特殊値の重み付き零点分布を求めた。重み付き零点分布における重み因子は対称 2 次 L 関数のままにし、零点を考察するほうの L 関数を対称べき L 関数に一般化した場合の重み付き零点分布も計算をおこなった。そして得られた結果から一般の L 関数の族に対する重み付き零点分布の振る舞いを予想した。

この予想(重み付き密度予想, Weighted density conjecture)を軸にして、次数が 1 である可愛い L 関数である「Dirichlet L 関数」の場合に重み付き零点分布を計算した。Dirichlet L 関数を扱う上では保型形式のときのような跡公式はないが、その代わりに解析的整数論の技巧が有効な働きをした。解析的整数論の技巧により、Dirichlet 指標に対するパラメーター付き跡公式と同様の公式(Selberg の公式)が得られる。この公式を解析し、主要項や誤差項の切り分けなどを実行し、Weil の明示公式と合体させることで、Dirichlet L 関数の族に対する重み付き零点分布の計算をおこなった。

4. 研究成果

対称べき L 関数の族の零点分布に L 関数の特殊値の重みを付けた量を考察することで、「零点を扱っているほうの L 関数と重み因子に現れる L 関数が異なるものであるなら、零点分布は重みが付いたとしても重みのない零点分布と一致する」という現象を発見した。具体的に述べると、 r 次の対称べき L 関数の零点分布は、 $1/2$ と 1 の間の実数 s に対する対称 2 次 L 関数の s での特殊値を重み因子とすると、 r が 2 と異なるなら重み付き零点分布は通常零点分布と同じであることが判明した。また s が $1/2$ に等しくないならば $r=2$ であっても零点分布は通常のものと同じであることも判明した。さらに、 $r=2$ かつ $s=1/2$ のときに限り、重み付き零点分布は通常のものから変化するということが発見した。しかもこの変化によって新たに生じる密度関数は Katz-Sarnak の予想に出てくる 5 種類の密度関数とは異なる新しいタイプのものである。これは Kowalski, Saha, Tsimerman の研究や Knightly, Reno の研究で観察された「直交型からシンプレクティック型へ変化する」という現象とは異なり、もともとの 5 種類の密度関数の中で閉じていない。この対称べき L 関数に関する考察をもとに、一般の L 関数の零点分布に関する予想(重み付き密度予想, Weighted density conjecture)を提唱することができた。

Dirichlet L 関数の通常零点分布は Hughes, Rudnick がユニタリー型であることを突き止めている。本研究では九州大学の Ade Irma Suriajaya 氏と共同で、この種の零点分布に Dirichlet L 関数の特殊値(の絶対値の 2 乗)の重みを付けて重み付き零点分布を考察した。結果として、重み因子が中心値のときに限り零点分布が通常零点分布から変化し、変化したものはランダムエルミート行列に対する相関関係関数(ガウス型ユニタリーアンサンブル)に一致することが判明した。スタンダード保型 L 関数の Knightly, Reno の手法は重み因子が中心値の場合のみを扱っているが、彼らの証明法を少し修正するだけで s での特殊値を重み因子とした場合の計算も可能である。よって本研究により、 s での特殊値を重み因子とした場合の L 関数のシンプレクティック型、ユニタリー型、直交型が得られたことになる。

また本研究期間に、Hecke 固有値の代数的整数性とその Hecke 体の次数評価への応用に関する論文執筆もおこなった(信州大学の佐久川憲児氏との共同研究). 論文は完成していなかったが研究自体は以前に終了していたものである. しかしながらこの成果を論文としてまとめる作業において、執筆時に内容の細かい部分を修正したり改善したりする場面が何度か生じたため、ここで報告しておく. そしてついに完成した論文は現在投稿中であり、arXiv で公開されている. 一般の Hilbert 保型形式や Siegel 保型形式を扱っていることも文献として価値があるが、この論文ではシンプレクティック群の場合に「跡公式と Hecke 固有値の代数的整数性を組み合わせるとなぜ Hecke 体の次数評価が導出できるのか」という点も平易に解説してある. このような文献が世に出たことは研究業界において意義がある.

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計7件（うち査読付論文 3件/うち国際共著 0件/うちオープンアクセス 4件）

1. 著者名 杉山真吾	4. 巻 2269
2. 論文標題 モジュラー形式のHecke作用素の固有値の代数的整数性	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 数理解析研究所講究録「代数的整数論とその周辺」	6. 最初と最後の頁 136-148
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -
1. 著者名 杉山真吾	4. 巻 2264
2. 論文標題 Hecke作用素のレゾルベント跡公式とHurwitz類数の最適評価	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 数理解析研究所講究録「保型表現の解析的・数論的研究」	6. 最初と最後の頁 143-156
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -
1. 著者名 杉山真吾	4. 巻 2259
2. 論文標題 ディリクレL関数に対する重み付き1レベル密度	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 数理解析研究所講究録「解析的整数論とその周辺」	6. 最初と最後の頁 102-114
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -
1. 著者名 Takehiro Hasegawa, Takashi Komatsu, Norio Konno, Hayato Saigo, Seiken Saito, Iwao Sato, Shingo Sugiyama	4. 巻 -
2. 論文標題 The limit theorem with respect to the matrices on non-backtracking paths of a graph	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Annals of Combinatorics	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s00026-022-00617-z	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 杉山真吾	4. 巻 2230
2. 論文標題 対称べき L 関数の低い位置にある零点の重みつき密度について	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 数理解析研究所講義録「保型形式、保型L関数とその周辺」	6. 最初と最後の頁 1-15
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスとしている(また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Shingo Sugiyama, Ade Irma Suriajaya	4. 巻 8
2. 論文標題 Weighted one-level density of low-lying zeros of Dirichlet L-functions	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Research in Number Theory	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s40993-022-00359-0	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Sugiyama Shingo, Tsuzuki Masao	4. 巻 -
2. 論文標題 Quantitative non-vanishing of central values of certain L-functions on $GL(2) \times GL(3)$	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Mathematische Zeitschrift	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s00209-021-02886-5	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計33件(うち招待講演 23件/うち国際学会 14件)

1. 発表者名 杉山真吾
2. 発表標題 I-Bessel lattice sums and their relations to theta functions, coding theory and heat equations
3. 学会等名 第17回ゼータ若手研究集会(招待講演)(国際学会)
4. 発表年 2024年

1. 発表者名 杉山真吾
2. 発表標題 On relations between L-functions and random matrix theory
3. 学会等名 量子場の数理とその周辺 (招待講演)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 杉山真吾
2. 発表標題 Hecke体の次数増大度の評価について
3. 学会等名 東工大 数論・幾何学セミナー (招待講演)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 杉山真吾
2. 発表標題 Weighted density conjecture for families of L-functions
3. 学会等名 Zeta Functions in OKINAWA 2023 (国際学会)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 杉山真吾
2. 発表標題 ベッセル関数の格子上的和とテータ関数、線型符号、半離散熱方程式との関係
3. 学会等名 エクспанダーグラフの新しい構成手法の確立とその応用2 (招待講演)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 杉山真吾
2. 発表標題 Weighted distribution of low-lying zeros of L-functions in a family
3. 学会等名 The eleventh Pan Asian Number Theory Conference (PANT 2023-Harbin) (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 杉山真吾
2. 発表標題 L関数の族の重み付き零点密度とランダム行列理論について
3. 学会等名 北陸数論セミナー (招待講演)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 杉山真吾
2. 発表標題 保型形式とL関数の多角的研究について, これまでとこれから
3. 学会等名 金沢大学数理学談話会 (招待講演)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 杉山真吾
2. 発表標題 Recent progress on the weighted density of low-lying zeros of L-functions in a family
3. 学会等名 Number Theory in Tokyo (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 杉山真吾
2. 発表標題 同変関数の存在とSchwarz微分
3. 学会等名 日本数学会2023年度年会
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 杉山真吾
2. 発表標題 ラマヌジャングラフの構成と暗号学的ハッシュ関数への応用
3. 学会等名 2023早稲田整数論研究集会（招待講演）
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 杉山真吾
2. 発表標題 ラマヌジャングラフと暗号学的ハッシュ関数
3. 学会等名 第16回ゼータ若手研究集会（国際学会）
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 杉山真吾
2. 発表標題 Hecke作用素のレゾルベント跡公式とHurwitz類数の最適評価
3. 学会等名 RIMS共同研究(公開型)「保型表現の解析的・数論的研究」(国際学会)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 杉山真吾
2. 発表標題 モジュラー形式のヘッケ固有値の代数的整数性
3. 学会等名 RIMS共同研究(公開型)「代数的整数論とその周辺2022」(国際学会)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 杉山真吾
2. 発表標題 Quantum probability theory and the Hecke algebra of p-adic PGL(2)
3. 学会等名 Zeta Functions in OKINAWA 2022 (国際学会)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 杉山真吾
2. 発表標題 同変関数の存在性とシュワルツ微分について
3. 学会等名 早稲田整数論セミナー(招待講演)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 杉山真吾
2. 発表標題 モジュラー形式のヘッケ固有値の整数性とそのヘッケ体への応用
3. 学会等名 津田塾大学整数論ワークショップ2022(招待講演)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 杉山真吾
2. 発表標題 Introduction to the Ramanujan-Petersson conjecture and subconvexity
3. 学会等名 第23回整数論オータムワークショップ "Analytic number theoretic aspects of automorphic L-functions" (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 杉山真吾
2. 発表標題 ディリクレL関数に対する重み付き1レベル密度
3. 学会等名 RIMS共同研究 (公開型) 「解析的整数論とその周辺」 (国際学会)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 杉山真吾
2. 発表標題 Quantum walks and zeta functions
3. 学会等名 CRESTミニワークショップ「量子計算と暗号」 (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 杉山真吾
2. 発表標題 シュワルツ微分と同変関数について
3. 学会等名 九大代数学セミナー (招待講演)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 杉山真吾
2. 発表標題 The one-level density for Dirichlet L-functions weighted by L-values
3. 学会等名 第9回京都保型形式研究集会（招待講演）
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 杉山真吾
2. 発表標題 Weighted One-level Density for Symmetric Power L-Functions
3. 学会等名 Arithmetik an der A7（招待講演）（国際学会）
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 杉山真吾
2. 発表標題 On the existence of equivariant functions
3. 学会等名 多重ゼータ値の諸相
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 杉山真吾
2. 発表標題 L関数と保型形式について
3. 学会等名 第17回ドレスト光子理論個別検討会（招待講演）
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 杉山真吾
2. 発表標題 グラフ上の後戻りのない道の個数の非可換化と極限定理
3. 学会等名 ラマヌジャン・グラフの整数論による耐量子計算機暗号へのアプローチ (招待講演)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 杉山真吾
2. 発表標題 四元数環を用いたラマヌジャングラフの明示的構成
3. 学会等名 スペクトラルグラフ理論および周辺領域, 第10回研究集会 (招待講演)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 杉山真吾
2. 発表標題 対称べき L 関数の低い位置にある零点の重みつき密度について
3. 学会等名 RIMS共同研究(公開型)「保型形式、保型L関数とその周辺」(国際学会)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 杉山真吾
2. 発表標題 Resolvent trace formulas and optimal estimates of the Kronecker-Hurwitz class numbers
3. 学会等名 第7回京都保型形式研究集会 (招待講演)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 杉山真吾
2. 発表標題 対称べきL関数のlow-lying zeroと対称2次L関数の特殊値について
3. 学会等名 神戸大学大学院理学研究科数学教室談話会（招待講演）
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 杉山真吾
2. 発表標題 Hilbertモジュラー形式の対称べきL関数のlow-lying zeroの分布とL関数の特殊値による重み付き分布について
3. 学会等名 Friday Tea Time Zoom Seminar（招待講演）
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Shingo Sugiyama
2. 発表標題 Low-lying zeros of symmetric power L-functions weighted by L-values
3. 学会等名 Japan Europe Number Theory Exchange Seminar（招待講演）（国際学会）
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 杉山真吾
2. 発表標題 ある保型L関数の族の零点分布について
3. 学会等名 Langlands and Harmonic Analysis 第5回
4. 発表年 2021年

〔図書〕 計1件

1. 著者名 杉山真吾, 横山俊一	4. 発行年 2022年
2. 出版社 日本評論社	5. 総ページ数 192
3. 書名 社会に最先端の数学が求められるワケ(2)	

〔産業財産権〕

〔その他〕

金沢大学研究者情報 https://ridb.kanazawa-u.ac.jp/public/detail.php?id=11465 夢ナビの研究紹介動画 https://dougayumenavi.info/Lecture/PublishDetail/2023003032?back=

6. 研究組織

氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計2件

国際研究集会 Number Theory in Tokyo	開催年 2023年～2023年
国際研究集会 第23回整数論オータムワークショップ "Analytic number theoretic aspects of automorphic L-functions"	開催年 2022年～2022年

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------