

令和 6 年 9 月 24 日現在

機関番号：14301

研究種目：若手研究

研究期間：2020～2023

課題番号：20K14344

研究課題名（和文）断層撮影技術の基礎となる微分方程式の未知係数決定逆問題にかかる総合的解析

研究課題名（英文）A comprehensive analysis on the inverse problem of determining unknown coefficients of a differential equation which is a basis of a tomographic technology

研究代表者

川越 大輔（Kawagoe, Daisuke）

京都大学・情報学研究科・助教

研究者番号：30848073

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 2,400,000円

研究成果の概要（和文）：本研究課題は、次世代の非侵襲的断層撮影技術である拡散光トモグラフィ(Diffuse Optical Tomography (DOT))の実用化に向けた数学解析および数値解析である。申請者はこれまでに、DOTに関連する微分積分方程式の係数決定逆問題に対して実現可能と思われる理論的解法を提案しており、本研究課題では数値実験によってこの逆問題解法の実現可能性を議論した。2次元および3次元凸領域において、少なくとも散乱の影響が小さい（または領域の直径が小さい）場合には研究代表者の提案手法が機能することが、数値実験のレベルで確認された。

研究成果の学術的意義や社会的意義

DOTは、近赤外光の生体に対する光学特性を利用した次世代の非侵襲的断層撮影技術であり、医学的なメリットからその実現が期待されている。しかしながら、X線や強磁場とは異なり、生体内における近赤外光の伝播は散乱を伴うため、その実現が困難となっている。DOTは輸送方程式と呼ばれる微分積分方程式の係数決定逆問題と数理モデル化される。この係数決定逆問題に対して純粋数学的な観点からは多くの研究がなされてきたが、DOTの実現に繋がる解法は提案されてこなかった。本研究課題は、理論と応用とを結ぶ新たな学術の発露を担っている。

研究成果の概要（英文）：This research project is a mathematical and numerical analysis aimed at the realization of Diffuse Optical Tomography (DOT), which is a next-generation non-invasive tomographic technique. The applicant has proposed an analytical method to solve an inverse problem to determine a coefficient of an integro-differential equation which is a mathematical model of DOT. He discussed the feasibility of this method through numerical experiments during the period. It was confirmed at the level of numerical experiments that the method works at least when the scattering effect is small (or the diameter of the domain is small) in two or three dimensional convex domains.

研究分野：数理解析学関連

キーワード：逆問題解析 偏微分方程式論 積分方程式 数値解析 スペクトル解析

1. 研究開始当初の背景

拡散光トモグラフィ (Diffuse Optical Tomography, DOT) は、近赤外光の生体に対する光学特性を利用した、次世代の非侵襲的断層撮影技術である。

DOT は X 線 CT や MRI と比較して、(i) 人体への害が少ない、(ii) 防護施設を必要としないため低コストである、(iii) 撮影機材の小型化が見込まれる、といったメリットがあり、医療の現場からその実現が期待されてきた。しかしながら、X 線や強磁場とは異なり、生体内における近赤外光の伝播は散乱を伴うため、その実現が困難となっている。

DOT は輸送方程式と呼ばれる微分積分方程式の係数決定逆問題と数理モデル化される。この係数決定逆問題に対して、albedo operator と呼ばれる、入射光と透過光を対応づける作用素を利用した解法が提案され、以降はこの albedo operator に基づく逆問題解析が盛んに行われてきた。しかし、albedo operator を実際の実験で“観測”することは極めて困難であるため、この逆問題解法は実用化には至っていない。また工学の分野からは、拡散方程式による近似を用いた逆問題解析や Monte Carlo シミュレーションを利用した推定法が提案されているが、これらの提案手法によって推定された係数の精度を保証するものが無いのが現状である。

以上の現状を踏まえ、実現可能かつ精度が保証された逆問題解法の提案が応用数学の視点から求められていた。そこで申請者は、輸送方程式の境界値問題(順問題)における解の不連続性の伝播に着目した。輸送方程式の境界値問題において、適当な条件下では境界値の不連続性が解の不連続性として散乱の影響を受けずに直進し、不連続点における解のジャンプ量は輸送方程式の係数に応じて指数関数的に減衰する。そこで申請者は、入射光および透過光の不連続点における解のジャンプ量と既存の X 線 CT の原理を組み合わせ、輸送方程式の係数を決定する方法を提案した。この提案手法では境界値の不連続性のみを観測すれば良いため、albedo operator による解法と比較して必要な情報が少なく、実現可能性が高いと考えられる。また、X 線 CT の理論に基づくため、得られる係数の推定値についても数学的にはその精度が保証される。しかしながら、提案手法では指数減衰する不連続性を観測しなければならず、不連続性を実際に観測できるか、誤差の影響をどの程度受けるか、といった観点の検証はまだ十分に行われていなかった。

2. 研究の目的

本研究課題は応用指向の逆問題解析という観点を重視し、申請者の提案する逆問題解法が実用に堪えるかを検討するものである。この目的意識に沿えば、実際の実験により不連続量を観測すべきであるが、申請者の所属する環境下では実験の実施が困難であるため、前段階として数値実験による検証を行う。

また、順問題の解の不連続量は指数減衰するため、そもそも観測することが困難であると予想される。そこで、光学的に特異な性質を持つメタマテリアルを導入することで、減衰した不連続量を増幅して観測しやすくできないか検討する。特に、メタマテリアルに関連して現れる、Neumann—Poincaré (NP) 作用素と呼ばれる境界積分作用素のスペクトルの構造を精査し、所望の性質を有するメタマテリアルの設計を行う。

3. 研究の方法

先述の目的を踏まえ、本研究課題では3つの小課題を設定した。

【小課題1】数値実験による申請者提案手法の検証

数値実験により不連続性を観測し、その情報と X 線 CT の技術を駆使して輸送方程式の係数を決定する。しかしながら、素朴に数値計算を行ったのでは、順問題の解の不連続性を数値的に捉えることはできない。そこで、係数や解に不連続性を持ちうる微分方程式に対する高精度な数値計算解法の開発が必要となる。申請者の提案手法では順問題の解の不連続点が事前に分かるため、この不連続性を考慮したメッシュの生成を行い、不連続 Galerkin 法による数値実験を実施することとした。この数値実験の実装は、研究協力者である藤原宏志准教授（京都大学）に依頼した。また、不連続 Galerkin 法の誤差解析には元の境界値問題の厳密解の正則性が必要である。この厳密解の正則性の解析については、当該分野の専門家である Chun-Hsiung Hsia 教授および I-Kun Chen 准教授（両名とも National Taiwan University）を研究協力者に位置付けて議論を行った。

【小課題2】NP 作用素のスペクトルの解析

低周波帯における NP 作用素は、3次元の凸でない領域の上では正と負の固有値をそれぞれ可算無限個持つことが知られている。NP 作用素の負の固有値の存在はメタマテリアルへの応用を考える上で重要である一方で、トラスのような具体的な領域に限っても、その正確な値は知られていない。申請者はまずトラスに限って、NP 作用素の負の固有値の計算に挑戦することを構想した。最終的には、高周波帯におけるトラス上の NP 作用素の固有値分布を明らかにすることも念頭に置いている。

本小課題の推進に関しては、スペクトル解析の専門家である Hyeonbae Kang 教授（Inha University, 大韓民国）、Yong-Gwan Ji 氏（KIAS, 大韓民国）、安藤和典教授（愛媛大学）および宮西吉久准教授（信州大学）を研究協力者に位置付けた。

また、この小課題の推進に際して、別の視点からのアプローチも必要であると判断し、等方弾性体の数理モデルである Lamé system に対する NP 作用素の本質的スペクトルも精査することとした。本テーマについては、Hyeonbae Kang 教授に加えて Eric Bonnetier 教授および Charles Dapogny 氏（Université Grenoble Alpes, フランス）を研究協力者とした。

【小課題3】粒子モデル/波動モデルの定量的対応づけ

輸送方程式は近赤外光を光子とみなした粒子の伝播の数理モデルであるのに対し、Helmholtz 方程式は電磁波のような波動の伝播の数理モデルである。そのため、それぞれの数理モデルによって得られる情報の相互関係は全く自明でない。そこで本研究課題では、それぞれの微分方程式の解に着目して、それぞれのモデルの定量的な対応づけを行う。

4. 研究成果

新型コロナウイルス感染症の影響で、当初予定していた成果は得られなかったものの、下記の成果を挙げる事ができた。

小課題 1. について、2 次元および 3 次元凸領域において、少なくとも散乱の影響が小さい（または領域の直径が小さい）場合には研究代表者の提案手法が機能することが、数値実験のレベルで確認された。しかし、散乱の影響が大きい場合には係数決定の精度が悪く、別の決定方法の提案が期待される。

また、数値計算結果の精度と関連して、定常輸送方程式と同様の微分積分方程式である定常線型 Boltzmann 方程式について、入射境界条件下での解の正則性を精査した。領域の直径が十分小さい場合にはこの境界値問題の解が Sobolev 空間 $W^{1,p}$, $1 \leq p < 2$ に属するが、領域の境界の Gauss 曲率が一律に正の場合には p の上限が 3 となることを示した。また、それぞれの場合について上限が最良である、すなわち等号が成立しない例を構成した。さらに、境界の Gauss 曲率が一律に正であることを仮定した場合の正則性は非線型 Boltzmann 方程式についても成立することが判明した。これらの一連の結果は雑誌に投稿中であり、そのうちの 1 つは採録が決定している。

小課題 2. では、トーラスではなく 3 次元凸領域の境界上で定義された NP 作用素のスペクトルの構造を精査した。球および prolate spheroid 上の NP 作用素は負の固有値を持たないのに対して、oblate spheroid 上の NP 作用素は負の固有値を有限個持つことが知られている。このことは、負の固有値の存在/非存在は曲率のような局所的な情報のみに依存するのではなく、領域の大域的な形状にも依存することを示唆している。このことを踏まえ、一般の 3 次元凸領域の境界上で定義された NP 作用素が負の固有値を持つための、境界に対する十分条件の候補をいくつか与えた。現段階ではその数学的記述に至っていない。

小課題 3. については、異なる特徴に着目した数理モデルを相互に結び付ける法則を発見するに至らなかった。「1. 研究開始当初の背景」でも言及したとおり、輸送方程式は拡散方程式で近似されるが、実際は拡散方程式が輸送方程式のスケール極限で得られている。この極限は特異摂動問題と解釈することもでき、この性質を精査するために、トイモデルとして線型移流方程式の楕円型正則化の収束評価を精密に与えた。この収束評価は境界条件に依存するもので、本研究課題に適用する際にはそこで課される境界条件に対する注意が必要であることが分かった。

また、別のスケールとして Euler—Poisson 系の解の構造も Junsik Bae 氏 (UNIST, 大韓民国) とともに調べ、適当な条件下で多次元の局所化された進行波解の非存在を証明した。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計3件（うち査読付論文 2件 / うち国際共著 2件 / うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 I-Kun Chen, Hiroshi Fujiwara, Daisuke Kawagoe	4. 巻 -
2. 論文標題 Tomography from Scattered Signals Obeying the Stationary Radiative Transport Equation	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 Practical Inverse Problems and Their Prospects	6. 最初と最後の頁 27 ~ 46
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/978-981-99-2408-0_3	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 I-Kun Chen, Chun-Hsiung Hsia, Daisuke Kawagoe and Jhe-Kuan Su	4. 巻 -
2. 論文標題 Geometric effects on $W^{1, p}$ regularity of the stationary linearized Boltzmann equation	5. 発行年 2025年
3. 雑誌名 Indiana University Mathematics Journal	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 藤原宏志, 川越大輔, 陳逸昆	4. 巻 27
2. 論文標題 不連続性にもとづく散乱信号からのトモグラフィの数値的実現	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 計算工学講演会論文集	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計13件（うち招待講演 7件 / うち国際学会 9件）

1. 発表者名 藤原宏志, 川越大輔, 大石直也
2. 発表標題 解の不連続性を利用する3次元散乱信号からのトモグラフィの数値的試み
3. 学会等名 第28回計算工学講演会
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 Daisuke Kawagoe
2. 発表標題 Essential spectrum of elastic Neumann-Poincare operators with a corner
3. 学会等名 10th International Congress on Industrial and Applied Mathematics (国際学会)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 今川真城, 川越大輔
2. 発表標題 定常移流方程式に対する楕円型正則化の収束率
3. 学会等名 日本数学会2023年度秋季総合分科会
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 Daisuke Kawagoe
2. 発表標題 On convergence rates of an elliptic regularization applied to a stationary advection equation
3. 学会等名 2023 NCTS PDE Conference on Recent Development of Fluid Dynamics and Kinetic Theory (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 川越大輔, Junsik Bae
2. 発表標題 Nonexistence of multi-dimensional solitary waves for the Euler-Poisson system
3. 学会等名 非線形波動から可積分系へ2023
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 Daisuke Kawagoe
2. 発表標題 On convergence rates of an elliptic regularization with the Neumann boundary condition applied to a stationary advection equation
3. 学会等名 Workshop for young scholars Control and inverse problems on waves, oscillations and flows -Mathematical analysis and computational methods- (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 川越 大輔, 藤原 宏志, 陳 逸昆
2. 発表標題 ひかりトモグラフィのための定常輻射輸送方程式の解の不連続性の解析
3. 学会等名 2022年度応用数学合同研究集会
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Daisuke Kawagoe
2. 発表標題 A remark on the generalized convexity condition and propagation of boundary-induced discontinuity in stationary radiative transfer
3. 学会等名 RIMS 共同研究 (公開型) 逆問題と医用イメージングとその周辺 (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 Daisuke Kawagoe
2. 発表標題 $W^{1, p}$ estimate of solutions to the stationary transport equation with the incoming boundary condition
3. 学会等名 Workshop for young scholars Control and inverse problems on waves, oscillations and flows -Mathematical analysis and computational methods- (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Daisuke Kawagoe
2. 発表標題 On polynomial compactness of elastic Neumann-Poincare operators on $C^{1,\alpha}$ boundaries in three dimensions
3. 学会等名 The Third Russia-Japan Workshop "Mathematical analysis of fracture phenomena for elastic structures and its applications" - 21st Conference of Continuum Mechanics Focusing on Singularities (CoMFoS21) (国際学会)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Daisuke Kawagoe
2. 発表標題 Propagation of boundary-induced discontinuity in stationary radiative transfer and its application to the optical tomography
3. 学会等名 RIMS Workshop on "Theory and practice in inverse problems" (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Daisuke Kawagoe
2. 発表標題 On polynomial compactness of the elastic Neumann-Poincare operator on $C^{1,\alpha}$ boundaries in three dimensions
3. 学会等名 Mini-Workshop on Mathematical Analysis and Related Topics (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Daisuke Kawagoe
2. 発表標題 Propagation of boundary-induced discontinuity in stationary radiative transfer and its application to the optical tomography
3. 学会等名 Practical inverse problems and their prospects (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2022年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
研究協力者	藤原 宏志 (Fujiwara Hiroshi)		
研究協力者	安藤 和典 (Ando Kazunori)		
研究協力者	宮西 吉久 (Miyanishi Yoshihisa)		
研究協力者	夏 俊雄 (Hsia Chun-Hsiung)		
研究協力者	陳 逸昆 (Chen I-Kun)		
研究協力者	康 炫培 (Kang Hyeonbae)		
研究協力者	池 龍官 (Ji Yong-Gwan)		

6. 研究組織（つづき）

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
研究協力者	Bonnetier Eric (Bonnetier Eric)		
研究協力者	Dapogny Charles (Dapogny Charles)		
研究協力者	ペ ジュンシク (Bae Junsik)		

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計1件

国際研究集会	開催年
RIMS共同研究（公開型）非適切問題に対する諸アプローチ-理論と実践-	2024年～2024年

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関			
中国	National Taiwan University			
韓国	Inha University	UNIST		
フランス	Universite Grenoble-Alpes			