

令和 7 年 5 月 30 日現在

機関番号：10101

研究種目：国際共同研究加速基金（国際共同研究強化(A））

研究期間：2022～2024

課題番号：20KK0304

研究課題名（和文）環境と相互作用する多体電子系における線形応答の厳密理論の構築とその応用

研究課題名（英文）Rigorous construction of linear response theory for many-fermion systems interacting with environment and its applications

研究代表者

宮尾 忠宏（Tadahiro, Miyao）

北海道大学・理学研究院・教授

研究者番号：20554421

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 5,600,000円

渡航期間： 11ヶ月

研究成果の概要（和文）：近年、物質のトポロジカル相に関する研究が物理学者だけでなく数学者の間でも活発に行われている。チュービンゲン大学のTeufel教授らのグループと協力し、トポロジカル相の典型的な舞台であるギャップのある無限フェルミオン系における線形応答理論を、作用素環論の枠組みを用いて構築した。さらに、この理論を活用し、量子ホール効果の厳密解析を行った。本研究ではNEASSと呼ばれるアプローチを採用し、従来の解析方法と異なる独自の枠組みにより、より現実的な状況を考慮してホール係数が量子化されることを示した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

これまでの量子ホール効果の厳密解析は、周期境界条件を課した有限体積系に限定されていた。しかし、実際の観測では巨視的な物質に電場を加えることでホール効果が測定されるため、既存の理論枠組みではこの状況を適切に記述できなかった。本プロジェクトでは、チュービンゲン大学のTeufel教授と協力し、ギャップのある無限フェルミオン系において電場が掛かっている状況下でホール係数の量子化を証明した。NEASSアプローチを用いて線形応答理論を基礎から再構築し、従来理論の限界を克服した。

研究成果の概要（英文）：In recent years, research on topological phases of matter has been actively pursued not only by physicists but also by mathematicians. Collaborating with Professor Teufel's group at the University of Tuebingen, we developed a linear response theory for gapped fermionic systems in the bulk using the framework of operator algebras. Moreover, we applied this theory to rigorously analyze the quantum Hall effect. Our study adopts the NEASS approach, setting itself apart from conventional analyses by demonstrating the quantization of the Hall coefficient under a more realistic setting.

研究分野：数理物理学

キーワード：線形応答理論 ギャップ系 フェルミオン系 量子ホール効果 非平衡状態 作用素環論 NEASS

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属します。

1. 研究開始当初の背景

(1) 線形応答理論の概要

物質の性質を調べる基本的な手法の一つとして、対象物質に外場を加え、その応答を調べることが挙げられる。例えば、磁場を加えて帯磁率を測定するなどが典型例である。外場の影響により、系は熱平衡状態から逸脱するが、外場が弱い場合、その応答は線形関係に従う。この範囲内では、熱平衡からのずれが熱平衡状態におけるゆらぎと等しくなることが知られており、この関係を基礎にした久保公式を用いることで、様々な物理量の計算が可能となる。

久保公式の枠組みでは、物理量の計算は応答関数の解析に帰着される。この応答関数の解析には、グリーン関数法や Feynman ダイアグラムの手法が用いられ、現代の理論物理学において強力な解析手法として確立されている。久保公式の発見は、日本が世界に誇る統計力学の重要な成果の一つである。

(2) 厳密解析の現状

線形応答理論は理論物理学において確立された枠組みであるが、その数学的基盤の整備には課題が残されている。特に、熱力学極限における誤差項の制御が技術的な困難を伴う。既存のアプローチでは、この誤差項の評価を様々な仮定のもとで正当化しているが、具体的な物理モデルへの適用には依然として難点が多い。

近年、Teufel 氏がこの問題に対して重要な進展を遂げた。従来の理論では、外場を考慮したハミルトニアンに常にエネルギーギャップが存在することを仮定していたが、Teufel 氏の結果では、外場を加えないハミルトニアンにのみエネルギーギャップが存在することを仮定し、外場を含むハミルトニアンにはその仮定を課さない。この結果、理論の適用範囲が大幅に広がり、加えて、外場の 1 次応答のみならず高次応答についても具体的な評価が与えられている。

2. 研究の目的

本研究の目的は、環境と相互作用する無限に広がった多電子系における線形応答理論の厳密な基礎付けを構築することである。現行の理論では、例えば電場と電子の相互作用項が非有界作用素となるためその数学的扱いに難点があるなど、既存の理論枠組みでは現実的な実験設定を適切に記述することが困難であった。

本研究では以下の 2 段階の目標を設定した：

第一段階： 環境とは相互作用しない無限多体フェルミオン系を対象に、現実的な実験設定を含む線形応答理論を構築する。特に、量子 Hall 効果のようによく知られている具体的な系において、既存の理論が抱える問題点を解決することを目指す。

第二段階： 第一段階の成果を基盤として、環境と相互作用する無限多電子系への理論の拡張を図る。これには、電子フォノン相互作用系のエネルギーギャップの安定性に関する解析も含まれる。

3. 研究の方法

まず、第一段階として、Teufel 氏が提唱した NEASS (Non-Equilibrium Almost Stationary States) アプローチの無限系への拡張を試みる。これまでの理論は有限体積系で構築されており、無限系への拡張は困難を伴うため、まずは特定の物理現象に焦点を絞って解析を進める。具体的には、量子 Hall 効果に着目し、NEASS アプローチを用いてこれまでの理論が抱える問題点を克服することを目指す。量子 Hall 効果の解析は、近年注目されているトポロジカル相の研究とも密接に関連しており、本研究でもトポロジカル相の解析も重要な課題となる。

次に、第一段階で構築した理論を基に、電子フォノン相互作用を含む無限多電子系への応用を試みる。

4. 研究成果

現在までの研究成果は以下の通りである：

(1) 無限多体フェルミオン系における線形応答理論の構築：

NEASS を用いた新たな線形応答理論を構築し、誤差項（高次の応答）の評価を含む精密な理論を完成させた。この理論は従来の有限体積系に基づくアプローチ

を無限体積系に拡張するものであり、量子 Hall 効果の解析にも適用可能である。従来の理論では、外場が加わる場合にもエネルギーギャップの存在を仮定していたが、本研究ではその仮定を排除し、より一般的な状況に対応できる無限多体フェルミオン系における理論を確立した。

具体的には、外場が加わるとエネルギーギャップが閉じるような状況下での線形応答の評価を行い、その際の誤差項（高次の応答）の厳密な評価式を導出した。この結果は、電場を印加した多電子系など、従来の枠組みでは厳密な解析が困難であった物理系にも適用可能である。

本成果は arXiv に公開されており、数理解物理学のトップジャーナルである、Communications in Mathematical Physics への掲載が決定している（註：2025年5月時点）。

（２）量子ホール効果の厳密解析：

上述 1 で構成した NEASS を用いた新たな理論を適用し、無限系における量子 Hall 効果の厳密な数理解析を行った。これにより、従来の理論が取り扱えなかった外場が加わる場合の応答関数の挙動を詳細に解析できるようになった。

特に、電場の導入によりエネルギーギャップが閉じる場合でも、量子 Hall 効果の厳密な解析が可能となった。

さらに、NEASS の構造を利用して、Hall 伝導率の量子化を証明した。この研究から派生したトポロジカル相に関する共同研究が現在も進行中である。

（３）国際共同研究の推進：

2024 年度にはチュービンゲン大学の Teufel 教授および博士課程学生 Wesle 氏が北海道大学に滞在し、共同研究を行った。滞在期間中には、NEASS 理論に基づく応答関数の数理解析など今後のプロジェクトについて議論した。

京都大学で開催された国際研究集会「Rigorous Statistical Mechanics and Related Topics」において、Teufel 教授が量子 Hall 効果に関する講演を行い、本プロジェクトの研究成果を発表した。

また、Wesle 氏は北海道大学と九州大学で量子 Hall 効果に関する本プロジェクトの結果に関する講演を行った。

（４）電子フォノン相互作用系の解析：

環境との相互作用を取り入れた無限多電子系において、Holstein-Hubbard 模型を用いた Pirogov-Sinai 理論の構築を試みた。具体的には、フォノン場の導入による低温における KMS 状態の変化を解析し、電荷密度波の安定性を厳密に証明した。電子フォノン相互作用系に対する Pirogov-Sinai 理論の適用は本研究が初めての試みであり、従来の理論枠組みを大きく拡張するものである。特に、フォノン場との相互作用が無限系の KMS 状態の構造に与える影響を解析可能にしたことは、今後の線形応答理論の構築においても重要な基盤となる。

（５）1次元電子フォノン相互作用系の基底状態の解析：

富田・竹崎理論および von Neumann 環の standard form を用いて、1次元電子フォノン相互作用系における基底状態の構造を解析した。

その結果、電荷密度波が上述の作用素環論の枠組みで記述できることを明らかにした。この方向性は発展の可能性があり、今後も継続して研究を行う予定である。

以上の成果に基づき、本研究プロジェクトは次の段階として、電子フォノン相互作用を伴う無限多電子系における線形応答の厳密理論の構築とトポロジカル相の数学的特徴付けの問題の解決に向けた取り組みを進めていく予定である。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計4件（うち査読付論文 3件 / うち国際共著 1件 / うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 Miyao Tadahiro	4. 巻 191
2. 論文標題 Stability of Charge Density Waves in Electron-Phonon Systems	5. 発行年 2024年
3. 雑誌名 Journal of Statistical Physics	6. 最初と最後の頁 48 pages
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s10955-024-03250-7	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Miyao Tadahiro, Tominaga Hayato	4. 巻 455
2. 論文標題 Ground state properties of the periodic Anderson model with electron-phonon interactions	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 Annals of Physics	6. 最初と最後の頁 169381 ~ 169381
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.aop.2023.169381	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Miyao Tadahiro, Okida Seigo, Tominaga Hayato	4. 巻 28
2. 論文標題 Ground state of one-dimensional Fermion-Phonon systems	5. 発行年 2024年
3. 雑誌名 Infinite Dimensional Analysis, Quantum Probability and Related Topics	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1142/S0219025724500164	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Marius Wesle, Giovanna Marcelli, Tadahiro Miyao, Domenico Monaco, Stefan Teufel	4. 巻 -
2. 論文標題 Near linearity of the macroscopic Hall current response in infinitely extended gapped fermion systems	5. 発行年 2024年
3. 雑誌名 arXiv	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

[学会発表] 計8件(うち招待講演 8件/うち国際学会 5件)

1. 発表者名 Tadahiro Miyao
2. 発表標題 Magnetic properties of ground states in many-electron systems
3. 学会等名 Oberseminar mathematische physik, Tuebingen University (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 Tadahiro Miyao
2. 発表標題 Magnetic properties of ground states in many-electron systems
3. 学会等名 Mini-Workshop: Mathematics of Many-body Fermionic Systems, Oberwolfach Workshop (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 Tadahiro Miyao
2. 発表標題 Stability of charge density waves in electron-phonon systems
3. 学会等名 Himeji Conference on Partial Differential Equations (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2024年

1. 発表者名 Tadahiro Miyao
2. 発表標題 Rigorous Analysis of the Ground State Phase Diagram in Electron-Phonon Interaction Systems
3. 学会等名 The Sapporo Workshop on Mathematical Physics (招待講演)
4. 発表年 2024年

1. 発表者名 Tadahiro Miyao
2. 発表標題 Ordering of energy levels in Froehlich model
3. 学会等名 The Fukuoka Workshop on Mathematical Physics (招待講演)
4. 発表年 2024年

1. 発表者名 Stefan Teufel
2. 発表標題 Non-Equilibrium Almost Stationary States and Response to Electric Fields in Extended Systems of Interacting Electrons
3. 学会等名 Rigorous Statistical Mechanics and Related Topics (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2024年

1. 発表者名 Marius Wesle
2. 発表標題 Hall-conductivity in periodic infinite-volume Systems
3. 学会等名 Mathematical physics seminar, Kyushu university (招待講演)
4. 発表年 2024年

1. 発表者名 Stefan Teufel
2. 発表標題 Perturbative construction of non-equilibrium almost stationary states in gapped many-body quantum systems
3. 学会等名 XXI International Congress On Mathematical Physics (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2024年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
主たる渡航先の主たる海外共同研究者	トイフェル シュテファン (Teufel Stefan)	チュービンゲン大学・Department of Mathematics・Professor	
主たる渡航先の主たる海外共同研究者	ヴェスル マリウス (Wesle Marius)	チュービンゲン大学・Department of Mathematics・PhD candidate	

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
その他の研究協力者	モナコ ドミニコ (Monaco Dominico)	ローマ大学ラサピエンツァ・Dipartimento di Matematica・Professor	
その他の研究協力者	マルチェリ ジョヴァンニ (Marcelli Giovanna)	ローマ・トレ大学・Dipartimento di Matematica e Fisica・Professor	

6. 研究組織（つづき）

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
その他の研究協力者	富永 隼人 (Tominaga Hayato)	北海道大学・数学科・博士課程3年	

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計1件

国際研究集会	開催年
Rigorous Statistical Mechanics and Related Topics V	2024年～2024年

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関			
ドイツ	チュービンゲン大学			
イタリア	Universit`a di Roma Tre	Sapienza Universit`a di Roma		