

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 26 年 6 月 18 日現在

機関番号：32689

研究種目：基盤研究(A)

研究期間：2009～2013

課題番号：21244010

研究課題名(和文)非線型楕円型方程式の大域理論の比較研究を通じた統一的理解の研究

研究課題名(英文)Studies on a unified point of view on global theories of nonlinear elliptic equations

研究代表者

小澤 徹 (Tohru, Ozawa)

早稲田大学・理工学術院・教授

研究者番号：70204196

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 33,200,000円、(間接経費) 9,960,000円

研究成果の概要(和文)：物理現象を記述するモデル方程式として、場の古典論、流体力学、プラズマ物理をはじめ様々な分野に現れる重要な非線型楕円型偏微分方程式について、今まで個別に用いられることの多かった変分解析、非線型常微分方程式、粘性解理論の手法を総合的に駆使することにより、定在波の安定性や爆発現象を深く説明する方法論を確立し、さまざまな応用を見出した。

研究成果の概要(英文)：We studied nonlinear elliptic equations arising in various fields of mathematical physics by means of variational analysis, ordinary differential equations, and viscosity techniques. We studied orbital stability of standing waves, explicit blow-up solutions, and exponential decay of ground states for systems of nonlinear Schrödinger type equations.

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・大域解析学

キーワード：関数方程式の大域理論 非線型偏微分方程式

1. 研究開始当初の背景

非線型楕円型偏微分方程式は、方法的見地から

- (a) 変分解析的方法
- (b) 常微分方程式論的方法
- (c) 粘性解理論的方法

の三つが典型的な手法として考えられている。これらの方法はそれぞれ、方程式の持つ変分構造、解の動径対称性、解集合の持つ順序構造と云う全く独立の視点に基づいており、研究分野としてもそれぞれ独自の発展を遂げている。さて、個別の非線型楕円型方程式を上記の立場から一つを選んで論じようとする場合、必然的に次に挙げる状況を選択した事になる：

- (a) 主要部の楕円型作用素は発散型であり、非線型項は(非線型)ポテンシャル函数の導函数として与えられる。解の滑らかさ、可積分性、遠方での減衰度は函数空間を指定とする事で規定される。
- (b) 解は球対称である。原点及び無限遠方での境界条件を適宜設定する事が必要となる。
- (c) 解は実数値を取る。比較原理、最大値原理が成立する枠組を設定する事が必要となる。

この様に、一つの方法論に従う事は、付随する仮定や枠組の下で解の概念や性質を既定してしまう事を直ちに意味するが、上の三つの枠組は本質的な関連性に乏しい。その一方、これらの仮定や枠組自体を他の方法論の視点から系統的に論じようとする試みは殆ど無かった。これが研究開始当初の背景であった。

2. 研究の目的

本研究計画の目的は、個別の非線型楕円型偏微分方程式を題材に取って、上記三つの方法論を繋ぐ形で、その全体像を大きな立場から理解する方法を提示しようとするものである。

3. 研究の方法

研究目的を達成するために変分解析、常微分方程式、粘性解理論の三つのグループに分け、自らの研究を深めると共に、他のグループの対応する理論や結果を全体像として理解するための研究体制を整備する。その相互作用の場を早稲田大学に設ける。海外共同研究者との共同研究を推進するため必要に応じて相互の訪問・招聘を行う。必要に応じて専門家を国内外から招聘し専門知識の提供を受けたり本研究計画の進展中の研究に対する意見を求める。

4. 研究成果

楕円型評価については、基礎となるユークリッド空間内の内部領域の伸張パラメタ(例えば原点を中心とする球の半径)に関する依存性を明らかにし、楕円型評価における伸張パラメタに関する幕状依存項と伸張パラメタに依存しない因子とを分離して記述する事に成功した。これにより、全ユークリッド空間

における問題と内部領域における問題との関連が、伸張パラメタを通じて具体的に把握する事が可能となった。さらには非線型楕円型方程式系や非線型放物型方程式系への応用も見出し新たな知見を得た。

ソボレフ型埋蔵不等式については、動径対称な函数の満たすストラウスの不等式とニイの不等式を、一径数で補間することの出来る一般的な不等式を見出した。これにより、ストラウスの不等式とニイの不等式の統一的な理解が可能となった。さらには動径対称性の仮定が成立しない一般の場合への拡張も研究し、球面方向への若干の滑らかさを仮定すれば同様の不等式が成立する事を証明した。これは同時に全ユークリッド空間では破綻するソボレフのコンパクト埋蔵が、球面方向への滑らかさの仮定の下で回復する事実を主張するものであり、空間的に非均質性をもつ非線型楕円型方程式への応用が期待される。

また、有界領域におけるボワンカレの不等式を、全ユークリッド空間におけるスケール不変な不等式に書き換え、その本質が空間伸張に対応する運動群で特徴付けられる事も明らかにした。

二次の相互作用を持つシュレディンガー方程式の連立系については、質量共鳴条件と結合定数条件が解の大域的存在にどのように影響を及ぼすのか研究した。また、小さなデータに対しても解が爆発するような相互作用を見出した。更に定在波解の満たす非線型楕円型方程式系を変分問題として研究し質量共鳴との関連を議論した。

更に、ラグランジアンを定義する事により、質量共鳴条件と変分構造との関係を見出した。これにより、質量共鳴の新たな役割の記述が可能となり、二次相互作用における波動函数の複素共軛を通じた寄与の意義が、ラグランジュ形式の立場から明確になった。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計57件)すべて査読有

(1)T. Ozawa, H. Sunagawa
Small data blow-up for a system of nonlinear Schrödinger equations, J. Math. Anal. Appl., 399(2013), 147-155.

(2)K. Nakamura, T. Ozawa
Finite charge solutions to cubic Schrödinger equations with a nonlocal nonlinearity in one space dimension, Discrete and Continuous Dynamical Systems A, 33(2013), 789-801.

(3)Y. Cho, G. Hwang, T. Ozawa
Global well-posedness of critical nonlinear Schrödinger equations below L^2 , Discrete and

- Continuous Dynamical Systems A, 33(2013), 1389-1405. DOI: 10.3934/dcds.2013.33.1389
- (4)Y. Cho, T. Ozawa
A note on the existence of nontrivial solutions to a semilinear elliptic problem, Kyushu J. Math., 67(2013), 227-236.
- (5)J. Fan, T. Ozawa
Regularity criteria for a coupled Navier-Stokes and Q-tensor system, International Journal of Analysis, 2013(2013), Article ID 718173, 5pages, DOI : 10.1155/2013/718173
- (6)S. Machihara, T. Ozawa
Some inequalities related to the Lorentz spaces, Hokkaido Math. J., 42(2013), 247-267.
- (7)G. Hoshino, T. Ozawa
Analytic smoothing effect for a system of nonlinear Schrödinger equations, Differential Equations and Applications - DEA, 5(2013), 395-408.
- (8)N. Hayashi, K. Tanaka, T. Ozawa
On a system of nonlinear Schrödinger equations with quadratic interaction, Ann. Inst. Henri Poincaré, Analyse non linéaire, 30(2013), 661-690.
- (9)S. Machihara, T. Ozawa, H. Wadade
Generalizations of the logarithmic Hardy inequality in critical Sobolev-Lorentz spaces, J. Ineq. Appl., 2013, 2013 : 381
DOI : 10.1186/1029-242X-2013-381
- (10)S. Machihara, T. Ozawa, H. Wadade
Hardy inequalities on balls, Tohoku Math. J., 65(2013), 321-330.
- (11)Y. Cho, H. Hajaiej, G. Hwang, T. Ozawa
On the Cauchy problem of fractional Schrödinger equation with Hartree type nonlinearity, Funkcialaj Ekvacioj, 56(2013), 193-224.
- (12)J. Fan, T. Ozawa
A regularity criterion for compressible nematic liquid crystal flows, ISRN Mathematical Analysis, 2013(2013), Article ID 271324, 4pages, DOI:10.1155/2013/271324
- (13)J. Fan, T. Ozawa
Global existence of strong solutions to a time-dependent 3D Ginzburg-Landau model for superconductivity with partial viscous terms, Math. Nachr., 286(2013), 1792-1796.
DOI:10.1002/mana.201200050
- (14)K. Rogers, T. Ozawa
Sharp Morawetz estimates, J. d' Anal. Math., 121 (2013), 163-175.
DOI:10.1007/s11854-013-0031-0
- (15)K. Fujiwara, T. Ozawa
Exact remainder formula for the Young inequality and applications, International Journal of Mathematical Analysis, 7(2013), 2723-2735.
DOI:10.12988/ijma.2013.39230
- (16)P. Felmer, A. de Laire, S. Martinez, K. Tanaka
High energy rotation type solutions of the forced pendulum equation, Nonlinearity 26 (2013), 1473 -1499. DOI 10.1088/0951-7715/26/5/1473
- (17)S. Koike, A. Swiech,
Representation formulas for solutions of Isaacs integro-PDE, Indiana University Mathematical Journal, 62 (2013), 1473-1502.
doi: 10.1512/iumj.2013.62.5109
- (18)J. Byeon, K. Tanaka,
Multi-bump positive solutions for a nonlinear elliptic problem in expanding tubular domains, Calc. Var. PDE (2013) On line first.
DOI 10.1007/s00526-013-0639-z
- (19)J. Byeon, K. Tanaka,
Semi-classical standing waves for nonlinear Schrödinger equations at structurally stable critical points of the potential, J. Eur. Math. Soc. 15 (2013), 1859-1899.
DOI 10.4171/JEMS/407
- (20) J. Byeon, K. Tanaka,
Semiclassical standing waves with clustering peaks for nonlinear Schrödinger equations, Memoirs of the American Mathematical Society, 229(2013).
DOI:http://dx.doi.org/10.1090/memo/1076
- (21)J. Fan, T. Ozawa
Uniqueness of weak solutions to the 3D Ginzburg-Landau model for superconductivity, International Journal of Mathematical Analysis, 6(2012), 1095-1104.
- (22)J. Fan, T. Ozawa
Continuation criterion for the 2D liquid crystal flows, ISRN Mathematical Analysis, 2012(2012), Article ID 248473, 7pages,
DOI : 10.5402/2012/248473
- (23)J. Fan, T. Ozawa
Regularity criterion for the 3D nematic crystal flows, ISRN Mathematical Analysis, 2012(2012), Article ID 935045, 10pages,
DOI : 10.5402/2012/935045
- (24)J. Fan, T. Ozawa
Global strong solutions of the time-dependent Ginzburg-Landau model for superconductivity with a new gauge, International Journal of Mathematical Analysis, 6(2012), 1679-1684.
- (25)J. Fan, T. Ozawa
Uniqueness of weak solutions to the Ginzburg-Landau model for superconductivity, Zeit. Angew. Math. Phys., 63(2012), 453-459.
- (26)S. Katayama, T. Ozawa, H. Sunagawa
A note on the null condition for quadratic nonlinear Klein-Gordon systems in two space dimensions, Commun. Pure Appl. Math., 65(2012), 1285-1302.

- (27)J. Fan, T. Ozawa, Regularity criteria for hyperbolic Navier-Stokes and related system, *ISRN Mathematical Analysis*, 2012(2012), Article ID 796368, 7pages, DOI : 10.5402/2012/796368
- (28)J. Byeon, K. Tanaka, Nonlinear elliptic equations in strip-like domains, *Advanced Nonlinear Studies* 12 (2012), 749-765.
- (29)J. Kato, T. Ozawa Endpoint Strichartz estimates for the Klein-Gordon equation in two space dimensions and some applications, *J. Math. Pures Appl.*, 95 (2011), 48-71.
- (30)Y. Cho, S. Lee, T. Ozawa On Hartree equations with derivatives, *Nonlinear Analysis Series A: Theory, Methods & Applications*, 74(2011), 2094-2108.
- (31)T. Ozawa, Y. Yamauchi Life span of positive solutions for a semilinear heat equation with general non-decaying initial data, *J. Math. Anal. Appl.*, 379(2011), 518-523.
- (32)Y. Cho, T. Ozawa, S. Xia Remarks on some dispersive estimates, *Commun. Pure and Appl. Anal.*, 10(2011), 1121-1128.
- (33)J. Fan, T. Ozawa Regularity criterion for the incompressible visco elastic fluid system, *Houston J. Math.*, 37(2011), 627-636.
- (34)Y. Cho, T. Ozawa, Y.-S. Shim Invariant elliptic estimates, *J. Math. Anal. Appl.*, 382(2011), 162-171.
- (35)J. Fan, T. Ozawa Local Cauchy problem for the MHD equations with mass diffusion, *Differential and Integral Equations*, 24(2011), 1037-1046.
- (36)N. Hayashi, C. Li, T. Ozawa Small data scattering for a system of nonlinear Schrödinger equations, *Differential Equations and Applications - DEA*, 3(2011), 415-426.
- (37)S.Koike, O. Ley Comparison principle for unbounded viscosity solutions of degenerate elliptic PDEs with gradient superlinear terms, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 381 (2011), 110-120.
- (38)N. Ikoma, K. Tanaka, A local mountain pass type result for a system of nonlinear Schrödinger equations, *Calc. Var. Partial Diff. Eq.*, 40(2011), 449-480.
- (39)T. Ozawa, K. Yamauchi Analytic smoothing effect for global solutions to nonlinear Schrödinger equations, *J. Math. Anal. Appl.*, 364 (2010), 492-497.
- (40)J. Fan, T. Ozawa On regularity criterion for the 2D wave maps and the 4D biharmonic wave maps, *GAKUTO International Series, Math. Sci. Appl.*, 32 (2010), 69-83.
- (41)J. Fan, T. Ozawa Global Cauchy problem for the 2-D magnetohydrodynamic- models with partial viscous terms, *J. Math. Fluid Mech.*, 12 (2010), 306-319.
- (42)J. Fan, T. Ozawa Global Cauchy problems of certain magnetohydrodynamic - models, *Advances Appl. Math. Sci.* 6 (2010), 169-190.
- (43)S.Koike, A. Świąch Weak Harnack inequality for fully nonlinear uniformly elliptic PDE with unbounded ingredients, *Journal of Mathematical Society of Japan*, 61(2009), 723-755.
- (44)S.Koike, K. Nakagawa Remarks on the Phragmén-Lindelöf Theorem for L^p -viscosity solutions of fully nonlinear PDEs with unbounded ingredients, *Electronic Journal of Differential Equations*, 2009(146) (2009), 1-14.
- (45)J. Hirata, N. Ikoma, K. Tanaka Nonlinear scalar field equations in \mathbb{R}^N : mountain pass and symmetric mountain pass approaches, *Topol. Methods Nonlinear Anal.* 35 (2010), 253-276.
- (46)Y. Cho, H. Sasaki, T. Ozawa, Y.-S. Shim Remarks on the semirelativistic Hartree equations, *Discrete and Continuous Dynamical Systems A*, 23 (2009), 1277-1294.
- (47)J. Fan, T. Ozawa Uniqueness of weak solutions to the Cauchy problem for the 3-D time-dependent Ginzburg - Landau model for superconductivity, *Differential and Integral Equations*, 22 (2009), 27-34.
- (48)Y. Cho, T. Ozawa, Y.-S. Shim Elliptic estimates independent of domain expansion, *Calculus of Variations and PDE*, 34 (2009), 321-339.
- (49)T. Ozawa, K. Yamauchi Remarks on analytic smoothing effect for the Schrödinger equation, *Math. Z.*, 261 (2009), 511-524.
- (50)J. Fan, T. Ozawa Regularity criteria for the 3D density-dependent Boussinesq equations, *Nonlinearity*, 22 (2009), 553-568.
- (51)T. Ozawa, H. Sasaki Inequalities associated with dilations, *Commun. Contemporary Math.*, 11 (2009), 265-277.
- (52)J. Fan, T. Ozawa Regularity criteria for the magnetohydrodynamic equations with partial viscous terms and the Leray-MHD model, *Kinetic and Related Models*, 2 (2009), 293-305.
- (53)J. Fan, T. Ozawa Regularity criterion for a Bona-Colin-Lannes

system, *Nonlinear Analysis Series A : Theory, Methods & Applications*, 71 (2009), 2634-2639.
(54)Y. Cho, T. Ozawa
Sobolev inequalities with symmetry, *Commun. Contemporary Math.*,11(2009), 355-365.
(55)J. Fan, T. Ozawa
Regularity criteria for a simplified Ericksen - Leslie system modeling the flow of liquid crystals, *Discrete and Continuous Dynamical Systems A* 25 (2009), 859-867.
(56)J. Fan, T. Ozawa
Logarithmically improved regularity criteria for Navier-Stokes and related equations, *Math. Meth. Appl. Sci.*, 32 (2009), 2309-2318.
(57)K. Tanaka, Y. Sato
Sign-changing multi-bump solutions for nonlinear Schrödinger equations with steep potential wells, *Trans. Amer. Math. Soc.* 361 (2009) 6205-6253.

〔学会発表〕(計 30 件)

(1)T. Ozawa
SEMINARIO DI EQUAZIONI ALLE DERIVATE PARZIALI, 2014.2.26
Universite de Pisa Dipartimento di Matematica,
「Refinements of Hölder's inequality」
(2)T. Ozawa
Analyse Numérique et Equations aux Dérivées Partielles, 2014.1.30
Universite Paris-Sud Laboratoire de Mathématiques, 「Bilinear estimates in the Sobolev spaces」
(3)T. Ozawa
九州関数方程式セミナー
2013年11月29日(金) 15:30--17:00
福岡大学 セミナーハウス 2階 セミナー室
「ヘルダーの不等式の精密化」
(4)T. Ozawa
第3回室蘭非線形解析研究会
2013年11月2日(土)10:00 - 11:00
蘭工業大学 教育・研究2号館(Q棟)4階
「基礎的不等式再考 (Part I, II)」
(5)T. Ozawa
第2回岐阜数理科学研究会
2013年9月16日(月)
飛騨高山まちの博物館研修室
「Hardy type inequalities on balls」
(6)T. Ozawa
Mexico-Japan Joint Meeting on PDE's at Morelia, 2013.9.4
Campus Morelia, UNAM
「Hardy type inequalities on balls」
(7)T. Ozawa
Linear and Nonlinear PDE
August 2, 2013, Univ. of Pisa
「Mass resonance in a system of nonlinear Schrödinger equations」
(8)T. Ozawa

The 9th ISAAC Congress
August 8, 2013, Poland
「Hardy type inequalities on balls」
(9)T. Ozawa
The Asian Mathematical Conference 2013
June 30 (Sun) to July 4 (Thu), 2013
BEXCO, Busan, Korea
「Mass resonance in a system of nonlinear Schrödinger equations」
(10)T. Ozawa
The 8th Japanese-German International Workshop on Mathematical Fluid Dynamics
Jun. 17-20, 2013 at Waseda University.
「Hardy type inequalities on balls」
(11)T. Ozawa
Harmonic Analysis and PDEs on Manifolds
2013年4月19日(金) 14:00-14:50
中央大学後楽園キャンパス 6号館
「On a system of Schrödinger equations」
(12)T. Ozawa
偏微分方程式待兼山セミナーNO.19
2013年3月15日(金)
大阪大学理学部E棟301 大セミナー室
「Bilinear estimates on the Klein-Gordon equation」
(13)T. Ozawa
Tohoku University Scienceweb GCOE
The 5th GCOE International Symposium
"Weaving Science Web beyond Particle Matter Hierarchy"
March 4(Mon) - March 6(Wed), 2013, Sendai, Japan
「Sharp Morawetz estimates」
(14)T. Ozawa
北海道大学数学談話会
2013年2月7日(木)
北海道大学理学部4号館4-501室
「Sharp Morawetz Estimates」
(15)T. Ozawa
UK-Japan Winter School, Nonlinear Analysis
2013年1月7 - 12, ロンドン王立工学アカデミー
「Sharp Morawetz Estimates」
(16)T. Ozawa
東北大学月曜解析セミナー
2012年11月19日 14:00-15:30
東北大学合同棟203号室
「クライン・ゴールドン方程式に対する双線型評価とフーリエ制限問題」
(17)T. Ozawa
九州関数方程式セミナー
2012年11月2日(金) 15:30-17:00
福岡大学 セミナーハウス 2階 セミナー室D
「クライン・ゴールドン方程式の双線型評価」
(18)T. Ozawa
Seminar on Differential Equations in Osaka,
2012-in honor of Professor Hiroaki Tanabe's 80th birthday - August 21, 2012,

Osaka University 「Sharp bilinear estimate on the Klein-Gordon equation」
(19)T. Ozawa
9th International Conference on Harmonic Analysis and Partial Differential Equations, June 11-15, 2012, El Escorial (Madrid)
「A sharp bilinear estimate for the Klein-Gordon equation in two space-time dimensions」
(20)T. Ozawa
Evolution Equations, Related Topics and Application, March 19 - 23, 2012
Waseda University 「A sharp bilinear estimate for the Klein-Gordon equation」
(21)T. Ozawa
PDE seminar
March 1, 2012 南パリ大学数学教室
「Mass resonance in a system of nonlinear Schrödinger equations.」
(22)T. Ozawa
International Conference on Fluid and Gas Dynamics, September 23, 2011 浙江師範大学
「Finite charge solutions to cubic Schrödinger equations with a nonlocal nonlinearity in one space dimension」
(23)T. Ozawa
One Forum, Two Cities : Aspect of Nonlinear PDEs, August 29 - September 01, 2011
National Taiwan University
「Small data scattering for a system of nonlinear Schrödinger equations」
(24)T. Ozawa
International Workshop on Differential Equations and Applications, January 16, 2011 taiwan
「Life span of positive solutions for a semilinear heat equation with general non-decaying initial data」
(25)T. Ozawa
International Workshop “Nonlinear PDE’s @ IMPA”
IMPA, Rio de Janeiro, Brazil, August 02-06, 2010. 「Smoothing estimates on a class of dispersive equations」
(26)T. Ozawa
International Workshop “Fourier Analysis and Partial Differential Equations”
University of Göttingen, June 14, 2010.
「Remarks on some dispersive estimates」
(27)T. Ozawa
Dresden, 8th AIMS Conference
May 28, 2010 「Analytic smoothing effect for nonlinear Schrödinger equations」
(28)T. Ozawa
2009 国際ワークショップ「微分方程式とその応用」国立成功大学 December 20, 2009
「Life span of solutions to nonlinear heat equation」

(29)T. Ozawa
Work shop on Nonlinear dispersive and geometric evolution problems:singularities and asymptotics, University of British Columbia, August 17, 2009. 「Global Cauchy Problem for 2D Klein-Gordon equations」
(30)T. Ozawa
Nonlinear PDE in Zhang Jia Jie
Zhang Jia Jie City, China, August 12, 2009.
「Analyticity of solutions to nonlinear Schrödinger equations」

〔図書〕(計5件)

- (1)M. Sugimoto and T. Ozawa,
“Harmonic Analysis and Nonlinear Partial Differential Equations”, RIMS Kokyuroku Bessatsu B42, 2013, 170pp.
- (2)T. Ozawa and M. Sugimoto,
“Harmonic Analysis and Nonlinear Partial Differential Equations”, RIMS Kokyuroku Bessatsu B33, 2012, 121pp.
- (3)T. Ozawa and M. Sugimoto,
“Harmonic Analysis and Nonlinear Partial Differential Equations”, RIMS Kokyuroku Bessatsu B26, 2011, 175pp.
- (4)T. Ozawa and M. Sugimoto,
“Harmonic Analysis and Nonlinear Partial Differential Equations”, RIMS Kokyuroku Bessatsu B18, 2010, 146pp.
- (5)T. Ozawa and M. Sugimoto,
“Harmonic Analysis and Nonlinear Partial Differential Equations”, RIMS Kokyuroku Bessatsu B14, 2009, 173pp.

〔産業財産権〕なし

〔その他〕

<http://www.ozawa.phys.waseda.ac.jp/index2.html>

6. 研究組織

(1)研究代表者

小澤 徹 (OZAWA, Tohru)
早稲田大学・理工学術院・教授
研究者番号：70204196

(2)研究分担者

小池茂昭 (KOIKE, Shigeaki)
東北大学・理学研究科・教授
研究者番号：90205295

田中和永 (TANAKA, Kazunaga)
早稲田大学・理工学術院・教授
研究者番号：20188288